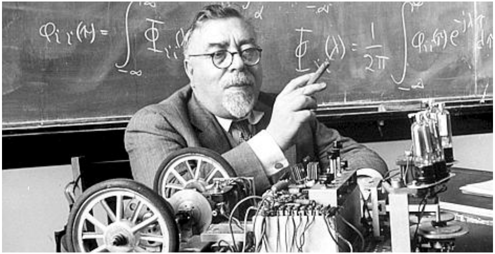
Filtre de Wiener

Guillaume Obozinski

LIGM/Ecole des Ponts - ParisTech

Traitement de l'information et vision artificielle
Ecole des Ponts

Filtre de Wiener



Norbert Wiener (1894 - 1964)

Image floutée

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + n(x, y)$$

- $f(x, y)$ image d'origine
- $h(x, y)$ noyau de convolution (noyau de floutage)
- $n(x, y)$ bruit additif
- $g(x, y)$ image dégradée

But

Estimer le signal d'origine à partir du signal flouté et bruité, en supposant connu le noyau h.

Formalisation

Trouver une estimée du signal $\widehat{f}$ tel que

$$\mathbb{E}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\widehat{f}(x, y) - f(x, y)\big)^2 dxdy\Big],$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance par rapport au bruit, soit minimal.

Notations

On utilise les notations classiques pour présenter le filtre de Wiener

Definition	Image	T. de Fourier
image d'origine	$f(x, y)$	$F(u, v)$
noyau	$h(x, y)$	$H(u, v)$
image dégradée	$g(x, y)$	$G(u, v)$
bruit	$n(x, y)$	$N(u, v)$
estimateur	$\widehat{f}(x, y)$	$\widehat{F}(u, v)$

- $\widehat{f}$ ne note pas la transformée de Fourier de f : c'est F.
- Ces transformées sont des fonctions à valeurs complexes !

Approche naïve

Dans le domaine spatial :

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + n(x,y)$$

Dans le domaine spectral :

$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v) + N(u,v)$$

Si on ignore le bruit

$$\widehat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$

Problème en présence de bruit

Le noyau est typiquement proche de 0 aux hautes fréquences, alors que le bruit est d'amplitude non nulle

Filtre de Wiener

- $S_f(u,v) = |F(u,v)|^2$ densité spectrale de puissance du signal
- $S_n(u,v) = \mathbb{E}\left[|N(u,v)|^2\right]$ densité spectrale de puissance du bruit
- $K(u,v)$ rapport bruit sur signal (inverse du rapport signal sur bruit).

Wiener propose

$$\widehat{F}(u,v) = W(u,v)\,G(u,v)$$

avec

$$\boxed{W(u,v) = \frac{\overline{H}(u,v)}{|H(u,v)|^2 + K(u,v)}}$$

- **Problème :** $K(u,v)$ est évidement inconnu.
- En pratique, on traite $K(u,v) = K$ comme une constante à ajuster.
- Lorsque $K \to 0$ on retrouve le cas sans bruit
- Lorsque $K \gg |H(u,v)|^2$ on atténue les hautes fréquences

Le filtre de Wiener minimise les moindres carrés

Par Plancherel :

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left(\widehat{f}(x,y)-f(x,y)\right)^2 dxdy\right] = \frac{1}{4\pi^2}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left|\widehat{F}(u,v)-F(u,v)\right|^2 dudv\right].$$

$$\left|F(u,v)-\widehat{F}(u,v)\right|^2 = \left|F(u,v)-W(u,v)\Big(F(u,v)\,H(u,v)+N(u,v)\Big)\right|^2$$

On n'écrit plus la dépendance en (u,v) : on note F pour $F(u,v)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\psi(W) &:= \mathbb{E}\big[|F-\widehat{F}(W)|^2\big] \\
&= \mathbb{E}\Big|(1-WH)F-WN\Big|^2 \\
&= \Big|(1-WH)F\Big|^2+\mathbb{E}\Big|WN\Big|^2 \\
&= \big(1-WH-\overline{WH}+|W|^2|H|^2\big)|F|^2+\Big|W\Big|^2\,\mathbb{E}|N|^2
\end{aligned}$$

Cette fonction de W est *fortement convexe* donc elle admet un minimum unique. Comme elle est convexe et différentiable ce minimum est caractérisé comme *point stationnaire* i.e. dont la différentielle est nulle.

Le filtre de Wiener minimise les moindres carrés

Par définition de la différentielle

$$\psi(W+\Delta)-\psi(W)=d\psi_W(\Delta)+o(|\Delta|)$$

Donc

$$\begin{aligned} d\psi_W(\Delta) &= -(\Delta H+\overline{\Delta H})|F|^2+(W\overline{\Delta}+\overline{W}\Delta)\,\mathbb{E}|N|^2 \\ &= \big(-H|F|^2+\overline{W}\,\mathbb{E}|N|^2\big)\Delta+\overline{\big(-H|F|^2+\overline{W}\,\mathbb{E}|N|^2\big)\Delta}. \end{aligned}$$

La différentielle est donc nulle ssi

$$-H|F|^2+\overline{W}\,\mathbb{E}|N|^2=0$$

ou de façon équivalente si

$$-\overline{H}+W\big(|H|^2+K\big)=0 \quad \text{puisque} \qquad K=\frac{\mathbb{E}|N|^2}{|F|^2}.$$

Donc

$$\boxed{W^\star=\frac{\overline{H}}{|H|^2+K}}$$

Phénomène de Gibbs

Oscillations de Gibbs

Soit f une fonction avec un discontinuité en t_0 de sorte que

$$f(t) = f_c(t) + \left[f(t_0^+) - f(t_0^-)\right] u(t - t_0) \quad \text{pour} \quad u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on applique à f un filtre passe-bas idéal de TF $\widehat{h}_\xi(\omega) = \mathbf{1}_{[-\xi,\xi]}(\omega)$,

on obtient $f_\xi(t) = (f_c * h_\xi)(t) + \left[f(t_0^+) - f(t_0^-)\right] \left(u * h_\xi\right)(t - t_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Or} \qquad (u * h_\xi)(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h_\xi(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \frac{\sin(\xi\,(t - \tau))}{\xi\,(t - \tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\xi t} \frac{\sin(v)}{v} dv \end{aligned}$$

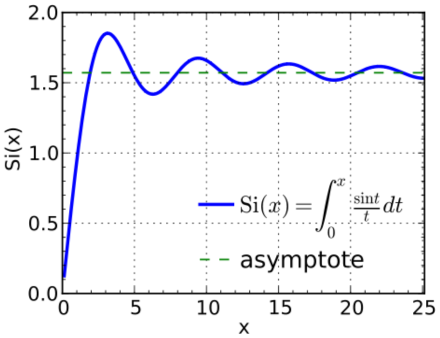
Comportement du Sinus Integral

On a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(x)=1,$$

$\mathrm{Si}(x)$ atteint un maximum local en $x=\pi$.



Or, pour $t_\xi = \frac{\pi}{\xi}$,

$$(u * h_\xi)(t_\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\pi}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(\pi) = 1,089490.$$

- $0,089490$ est la constante de Gibbs-Wilbraham.
- Ce pic ne décroit pas lorsque $\xi \to +\infty$