

Méthodes intégrales pour le problème direct de la magnéto- électro-encéphalographie tridimensionnelle

D.Bouvier, R.Keriven

octobre 2000

Résumé

Cet exposé porte sur la MEEG 3D dont le but est l'étude du cerveau au travers de son activité électrique. Le problème direct de la MEEG 3D consiste à déterminer le champ électromagnétique à l'extérieur du crâne, résultant de sources de courant connues situées à l'intérieur de celui-ci. Ce problème est exprimé sous forme d'équations intégrales satisfaites par le potentiel électrique V et le champ magnétique \mathbf{B} , nous abordons sa résolution numérique par la BEM (collocation constante et linéaire, méthode de Galerkin constante) et comparons les solutions obtenues aux solutions analytiques qui existent dans certains cas.

Introduction

Malgré les progrès récents de la médecine et le développement de techniques toujours plus sophistiquées, le fonctionnement du cerveau reste assez mal connu (qu'on songe par exemple aux épileptiques pour lesquels on ne connaît à l'heure actuelle aucun traitement général) et représente un champ d'investigations très actif. La MEEG 3D (magnéto-électro-encéphalographie tridimensionnelle) bien qu'elle soit encore en phase de développement semble être un moyen prometteur de faire progresser les connaissances dans ce domaine. C'est une méthode non invasive. Elle repose sur le fait que l'activité cérébrale se manifeste par des courants électriques et que ceux-ci engendrent nécessairement un champ électromagnétique (à l'intérieur et à l'extérieur de la tête). Pour mesurer le potentiel électrique on dispose des électrodes à la surface du crâne, pour le champ magnétique, comme il est très très faible, les mesures sont plus difficiles à réaliser et on doit utiliser un casque refroidi à l'hélium liquide dans une chambre isolante pour éviter au maximum les signaux parasites. Le problème central de la MEEG 3D (appelé problème inverse) est de retrouver les sources de courant à l'intérieur d'un conducteur à partir du champ mesuré à sa surface.

Le problème direct (par opposition) consiste, étant donné une source de courant à l'intérieur d'un conducteur, à établir le potentiel électrique et le champ magnétique résultants à l'extérieur. Il faut noter que de nombreux algorithmes de résolution du problème inverse utilisent de façon répétée la résolution du problème direct (méthodes de *fitting*). Il est donc important de trouver des algorithmes efficaces pour le problème direct et de déterminer les méthodes numériques les plus rapides et les plus précises possibles.

Passons en revue les différentes parties de cet exposé. Dans un premier temps nous précisons les données du problème. En MEEG 3D on fait habituellement l'hypothèse quasi-statique dans les équations de Maxwell, de plus il faut distinguer dans le vecteur densité de courant quelle est la composante due à l'activité neurologique et préciser comment la modéliser, nous y présentons les concepts de courants primaires et de dipôles de courant. Ensuite nous établissons les équations, satisfaites par V et \mathbf{B} , qui feront l'objet d'une résolution numérique; comme indiqué par le titre il s'agit d'équations intégrales, elles portent sur les frontières entre les différentes zones du conducteur. Une démonstration détaillée en est donnée en annexe. La troisième section s'intéresse alors à la résolution numérique du problème direct. L'équation satisfaite par le potentiel V est discrétisée via les méthodes de collocation et de Galerkin, on obtient à chaque fois un système linéaire $H \cdot V = V_o$ avec H singulière et dans la partie suivante nous utilisons la méthode de *deflation* qui permet de résoudre proprement ce système. Afin d'avoir un point de comparaison,

nous présentons ensuite les solutions analytiques de certains cas particuliers du problème direct. Suivent deux paragraphes dévolus à l'implémentation des méthodes de résolution et aux résultats effectivement obtenus.

Pour ceux qui s'intéressent au cerveau, on peut suggérer la lecture de "L'Atlas du cerveau" [1]. Une présentation générale et complète des divers aspects de la M-EEG 3D, biologiques, mathématiques ou instrumentaux est faite par l'équipe de M. Hämäläinen dans [2].

Table des matières

1	Le champ électromagnétique dans le crâne	3
1.1	Les équations de Maxwell	3
1.2	L'approximation quasi-statique	3
1.3	Courants primaires, Dipôles de courant	4
1.3.1	Courants primaires	4
1.3.2	Dipôles de courant, Densité surfacique	5
2	Equations intégrales	7
3	BEM (<i>Boundary Element Method</i>)	9
3.1	Principe de résolution	9
3.2	Méthodes de collocation	10
3.3	Méthodes de Galerkin	12
3.4	Calcul des coefficients	13
4	Solutions dégonflées (<i>Deflated solutions</i>)	16
5	Solutions analytiques	18
6	Mise en œuvre du problème direct	21
6.1	Implémentation	21
6.2	Quelques essais	22
6.3	Remarques diverses	29
A	Démonstration des équations intégrales	35

1 Le champ électromagnétique dans le crâne

1.1 Les équations de Maxwell

Dans n'importe quel milieu, le champ électromagnétique est régi par les équations de Maxwell rappelées ici:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

ϵ et μ sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique et dépendent du milieu considéré. ρ est la densité de charge et \mathbf{J} est le vecteur densité de courant, ils sont liés par la relation $\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Dans un milieu passif, non magnétique $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + (\epsilon - \epsilon_o) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, somme des courants ohmiques (déplacement des charges sous l'effet de \mathbf{E}) et des courants de polarisation, σ étant la conductivité électrique.

1.2 L'approximation quasi-statique

Dans le cerveau on considère que μ est égale à la perméabilité magnétique du vide $\mu_o (= 4\pi 10^{-7} Hm^{-1})$, on suppose que ϵ y est constante et que σ est constante par morceaux. Par ailleurs on fait classiquement deux approximations dans les équations de Maxwell comme expliqué dans [3]:

- l'approximation quasi-stationnaire $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J}$; dans un milieu non magnétique comme le cerveau, elle est équivalente à

$$\left\| \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\| \ll \sigma \left\| \mathbf{E} \right\|$$

- l'approximation quasi-statique: en plus de l'approximation quasi-stationnaire on suppose que $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$ (on néglige donc $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$). Dans ce cas il existe V potentiel électrique tel que

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (5)$$

Justifions ces approximations, dans le cerveau on a ϵ de l'ordre de $10^5 \epsilon_o$ ($\epsilon_o = 8.854 10^{-12} Fm^{-1}$ et σ de l'ordre de $0.3 \Omega^{-1} m^{-1}$). Si on décompose \mathbf{E} en série de Fourier on obtient des ondes de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) e^{2\pi jft}$

(correspondant à un phénomène de fréquence temporelle f comprise entre 0 et 100 Hz). On a alors:

$$\epsilon 2\pi f \approx 5.6 \cdot 10^{-4} \ll \sigma \approx 0.3 \Rightarrow \left\| \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\| \ll \sigma \|\mathbf{E}\|$$

ce qui valide l'approximation quasi-stationnaire. D'autre part si on pose $\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = \mathbf{G}(\mathbf{r}) e^{2\pi j \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}}$ avec \mathbf{F} fréquence temporelle et \mathbf{G} amplitude réelle satisfaisant la condition d'orthogonalité $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = 0$, on a $\nabla \cdot \mathbf{E}_o = 0$,

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}_o(\mathbf{r})) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_o(\mathbf{r})) - \Delta \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = -\Delta \mathbf{E}_o(\mathbf{r})$$

d'où

$$\nabla \wedge \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) e^{2\pi j f t}$$

or

$$\nabla \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \mu_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_o 2\pi j f (\sigma + \epsilon 2\pi j f) \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) e^{2\pi j f t}$$

Ainsi

$$\|\Delta \mathbf{E}_o(\mathbf{r})\| = |k| \|\mathbf{E}_o(\mathbf{r})\|, \quad \|\vec{F}\|^2 = \frac{|k|}{2\pi}$$

(avec $k = \mu_o 2\pi j f (\sigma + \epsilon 2\pi j f)$). La longueur d'onde spatiale $\lambda_F = \frac{1}{\|\mathbf{F}\|}$ est de l'ordre de $417m$, ce qui est grand devant les dimensions de la tête et justifie l'approximation quasi-statique. Les équations du champ électromagnétique dans le cerveau établies, nous allons maintenant nous intéresser aux courants qui y existent.

1.3 Courants primaires, Dipôles de courant

1.3.1 Courants primaires

On vient de voir que dans le crâne on peut considérer que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, il existe alors un champ \mathbf{A} appelé potentiel vecteur tel que $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$. Un tel champ \mathbf{A} n'est pas unique, aussi classiquement on impose la condition de jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (dite jauge de Coulomb). Delà on obtient

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

soit

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_o \mathbf{J} \tag{6}$$

Introduisons quelques notations qui serviront jusqu'à la fin de cet exposé. Par \mathbf{r} et \mathbf{r}' on désignera indifféremment des vecteurs ou des points de \mathbb{R}^3 . \mathbf{R} désignera toujours le vecteur $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et R sa norme, l'opérateur ∇ et les éléments de volume et de surface dr et ds se rapporteront à \mathbf{r} alors que ∇' , dr' et ds' se rapporteront à \mathbf{r}' . La solution de l'équation (6) qui satisfait $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ à l'infini est donnée par la formule de Poisson

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dr' \quad (7)$$

\mathbf{B} est obtenu en appliquant l'opérateur rotationnel

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla' \wedge \left(\frac{1}{R} \right) dr' \quad (8)$$

Dans le cerveau, milieu non passif, le vecteur densité de courant \mathbf{J} peut être décomposé en deux parties

- les courants ohmiques $\mathbf{J}^\nu = \sigma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r})$,
- les courant primaires $\mathbf{J}^p = \mathbf{J} - \mathbf{J}^\nu$ représentant les sources de courant dans le cerveau et qui correspondent à l'activité neuronale. C'est évidemment \mathbf{J}^p que l'on veut déterminer dans le problème inverse et qui est donné dans le problème direct.

En prenant la divergence du rotationnel de \mathbf{B} on trouve $\nabla \cdot (\mu_o \mathbf{J}) = 0$, soit

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad (9)$$

Avec de bonnes conditions aux limites, cette équation peut être résolue numériquement et dans certains cas, à la géométrie simple, on dispose également de solutions analytiques.

1.3.2 Dipôles de courant, Densité surfacique

En neuromagnétisme pour modéliser les courants primaires le concept de dipôles de courant est très souvent utilisé. Ainsi un courant primaire au voisinage d'un point \mathbf{r}_q peut être représenté par $\mathbf{J}^p = \delta(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}) \mathbf{Q}$ où δ est la masse de Dirac à l'origine. La source de courant correspondante est donc très locale. D'autre part l'utilisation des dipôles de courant simplifient considérablement l'expressions et le calcul de certains champs (cf. infra), et l'existence de solutions analytiques au problème direct pour ce type de source permet de valider les méthodes numériques développées.

Malgré les nombreuses études menées avec des dipôles et les avantages liés à leur utilisation, une densité dipolaire portée par une surface pourrait être

mieux adaptée à la MEEG. En effet en MEEG le champ électromagnétique enregistré à l'extérieur du crâne semble être surtout le fait des courants électriques ayant lieu dans la matière grise (ie à la surface du cortex), l'activité électrique profonde étant masquée. L'enveloppe du cortex ayant un relief complexe, une densité dipolaire portée par un maillage de la surface externe du cortex semble mieux se prêter à la modélisation des courants primaires que des dipôles. D'autre part une densité dipolaire surfacique est moins singulière que des dipôles de courant et pourrait donc mieux se comporter d'un point de vue numérique.

Dans la section suivante nous allons établir les équations intégrales, portant sur V et \mathbf{B} , qui seront effectivement résolues par la suite.

2 Equations intégrales

La discrétisation de l'équation (9) peut être envisagée de deux façons, une approche volumique avec les méthodes d'éléments finis (FEM) ou une approche surfacique avec des éléments frontière (BEM). Les premières nécessitent un maillage spatial du crâne conduisant à des systèmes linéaires de grande taille mais creuses et ne permettent pas l'utilisation de sources ponctuelles (dipôles de courant) ou surfaciques. Les secondes en ne maillant que des surfaces évitent ces deux problèmes (si les sources ne sont pas sur les surfaces maillées) mais les matrices des systèmes linéaires obtenus sont pleines et mal conditionnées. Nous avons retenu la seconde approche. Nous allons donner dans ce qui suit les équations intégrales satisfaites par le potentiel et le champ magnétique.

En première approximation on peut considérer que la tête est composée de plusieurs couches homogènes:

- le cortex
- le liquide céphalo-rachidien
- l'os
- la peau

Dans ce modèle la conductivité σ est constante dans chaque région et $\nabla\sigma$ est non nul uniquement à leurs frontières. Considérons donc un conducteur Ω constitué de n régions homogènes $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ de frontière et de conductivité respectives $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_n$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Si Ω_i et Ω_j sont deux régions adjacentes on note S_{ij} leur frontière commune $S_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ et \mathbf{n}_{ij} sa normale orientée de Ω_i vers Ω_j . Dans ce cas et avec les conditions de continuité aux bords suivantes:

$$\left[\sigma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right]_{S_{ij}} = 0$$

qui traduisent la continuité du vecteur densité aux interfaces des différents milieux. Il est connu (cf. [4]) que l'équation (9) se transforme en:

$$\forall r \in S_{ij} \quad \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} V(\mathbf{r}) = \sigma_o V_o(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{kl} (\sigma_k - \sigma_l) \int_{S_{kl}} V(\mathbf{r}') \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{n}_{kl} ds' \quad (10)$$

$$V_o(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_o} \int_{\Omega} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dr' \quad \sigma_o = 1 \quad (11)$$

V_o est le potentiel dû à \mathbf{J}^p dans un milieu homogène illimité de conductivité σ_o . On a également:

$$\forall r \in S_{ij} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_o(\mathbf{r}) + \frac{\mu_o}{4\pi} \sum_{kl} (\sigma_k - \sigma_l) \int_{S_{kl}} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_{kl} ds' \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_o(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \wedge \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) ds' \quad (13)$$

Ainsi le champ magnétique \mathbf{B} est bien déterminé dès que l'on connaît le potentiel V sur les frontières S_{kl} , ie. quand l'équation (10) est résolue. Ces relations sont classiques. Il est à noter que seuls les termes V_o et \mathbf{B}_o dépendent des sources de courant \mathbf{J}^p . La matrice du système linéaire associé à (10) ne dépend que de la géométrie et des propriétés physiques du conducteur et est donc calculée indépendamment des courants.

Pour un dipôle de courant placé en \mathbf{r}_q , V_o et \mathbf{B}_o s'expriment simplement.

$$V_o(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_o} \frac{\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\|^3} \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_o(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \mathbf{Q} \wedge \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\|^3} \quad (15)$$

Dans le cas d'une densité dipolaire portée pas une surface (qui doit être disjointe des S_{ij} définies ci-dessus pour éviter d'avoir des singularités sous l'intégrale), on ne dispose pas de formule équivalente .

Nous donnons en annexe une démonstration des équations (10) et (12). Ce sont elles qui serviront à la résolution numérique du problème direct, par les méthodes d'éléments frontière présentées ci-après.

3 BEM (*Boundary Element Method*)

3.1 Principe de résolution

On souhaite donc résoudre l'équation (10), de la forme $L(V)(\mathbf{r}) = V_o(\mathbf{r})$ avec L opérateur linéaire. On résout en un sens faible: on cherche V_{app} telle que

$$\forall \psi \in \mathcal{P}, \quad \langle V_o, \psi \rangle = \langle L(V_{app}), \psi \rangle$$

où V_{app} et \mathcal{P} sont respectivement une solution approchée de V et un espace de fonctions (appelées fonctions poids) à préciser, le crochet \langle, \rangle est défini par $\langle f, g \rangle = \int fg$ et l'intégration a lieu sur le domaine de définition de V_{app} (en l'occurrence les frontières entre les Ω_i). On commence par se donner un maillage triangulaire des surfaces concernées, on note

- $\{T_j\}$ les triangles du maillage,
- $\{\mathbf{r}_k\}$ les sommets du maillage,
- $\{\mathbf{x}_l\}$ les nœuds du maillage (qui peuvent être les sommets ou les barycentres des triangles suivant les cas).

(Si la source de courant retenue est une densité dipolaire portée par une surface, on doit également disposer d'un maillage de cette surface $\{T_j'\}, \{\mathbf{r}_k'\}, \{\mathbf{x}_l'\}$).

On prend n fonctions poids $\psi_1 \dots \psi_n$, \mathcal{P} est l'espace vectoriel engendré par ces fonctions. On va rechercher V_{app} sous la forme

$$V_{app}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^m V_i \phi_i(\mathbf{r})$$

où les ϕ_i sont connues et choisies de telle sorte que $\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ (les ϕ_i sont appelées fonctions de base). Si V_{app} est recherchée dans l'ensemble des fonctions constantes par triangle (P^0), on utilisera:

$$\begin{aligned} \phi_j(\mathbf{r}) &= 1 \quad \text{si } \mathbf{r} \in T_j \\ \phi_j(\mathbf{r}) &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

(ϕ_j est l'indicatrice du triangle T_j). Si V_{app} est recherchée dans l'ensemble des fonctions continues et linéaires sur chaque triangle (P^1), on prendra:

$$\begin{aligned} \phi_j(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l)}{\mathbf{s}_j \cdot (\mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l)} = \frac{\det(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l)}{\det(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l)} \quad \text{si } \mathbf{r} \in T(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l) \\ \phi_j(\mathbf{r}) &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

(ϕ_j est la fonction continue sur le maillage qui vaut 1 au sommet \mathbf{s}_j et 0 aux autres sommets).

Les V_i représentent les valeurs de V_{app} aux nœuds du maillage et seront donc les inconnues de l'équation. Cette dernière s'écrit maintenant sous la forme d'un système linéaire (dans la pratique $n = m$ et le système est carré) :

$$\begin{bmatrix} \langle \psi_1, V_o \rangle \\ \vdots \\ \langle \psi_n, V_o \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1, L(\phi_1) \rangle & \dots & \langle \psi_1, L(\phi_m) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_n, L(\phi_1) \rangle & \dots & \langle \psi_n, L(\phi_m) \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \quad (16)$$

en abrégé $V_o = H \cdot V$. Un petit calcul montre que pour les deux choix de ϕ_j faits ici, on a $\forall i$:

$$\sum_j H_{ij} = 0 \quad (17)$$

ce qui prouve que le noyau de H est au moins de dimension 1. En fait il est exactement de dimension 1 (on s'en aperçoit numériquement) et cela correspond au fait que le potentiel V solution de (10) est défini à une constante près. On peut considérer cela comme bon signe d'un point de vue physique, en revanche en termes d'algèbre linéaire cela compliquera la résolution du système. Deux problèmes se posent. Le second membre est-il dans l'image de la matrice et si oui comment inverser le système? Car si on écrit les solutions sous la forme $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \lambda \mathbf{e}$ avec $\mathbf{V} = {}^t [V_1, \dots, V_n]$, λ réel et $H \cdot \mathbf{e} = 0$, pour des λ grands, \mathbf{U} qui est la partie intéressante de de la solution risque d'être noyée par $\lambda \mathbf{e}$. Pour résoudre ces difficultés nous recourons plus loin à la méthode dite de *deflation*.

En M-EEG on utilise principalement deux types de fonctions poids,

- dans les méthodes de Galerkin, on prend $\psi_i = \phi_i$
- dans les méthodes de collocation, on utilise $\psi_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{c}_i - \mathbf{r})$

Les paragraphes suivants vont détailler les méthodes de collocation et de Galerkin et le calcul des différentes intégrales qui apparaissent dans la discrétisation de (10) puis nous donneront quelques indications sur le moyen de les calculer. Les coefficients $\langle V_o, \psi_i \rangle$ du second membre faisant intervenir des expressions de même nature (ou plus simples dans le cas de dipôles) que ceux de la matrice, ils ne sont pas précisés leur calcul relève de la même partie que celui des coefficients matriciels.

3.2 Méthodes de collocation

Dans les méthodes de collocation constante, les fonctions poids sont données par $\psi_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{r})$. Ce choix des fonctions poids simplifie grandement

l'expression du système linéaire que l'on réécrit

$$\begin{bmatrix} V_o(x_1) \\ \vdots \\ V_o(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\phi_1)(x_1) & \dots & L(\phi_n)(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L(\phi_1)(x_n) & \dots & L(\phi_n)(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

L'équation est résolue aux nœuds.

La collocation constante Elle se caractérise par $\phi_i = 1_{T_i}$ indicatrice du triangle T_i , et $\psi_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{c}_i - \mathbf{r})$ (les nœuds sont les barycentres des triangles). Exprimons les coefficients de la matrice. Pour tout i, j dans $\{1, \dots, n\}$, on a

$$H_{ij} = L(\phi_j)(c_i) = \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{4\pi} \int_{T_j} \frac{(\mathbf{c}_i - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{c}_i - \mathbf{r}'\|^3} ds' \quad \text{si } i \neq j \quad (19)$$

$$= \frac{\sigma_i^- + \sigma_i^+}{2} \quad \text{si } i = j \quad (20)$$

avec σ_j^- la conductivité intérieure et σ_j^+ la conductivité extérieure à la surface portant le triangle T_j orienté par sa normale \mathbf{n}_j .

La collocation linéaire Dans la collocation linéaire on a encore $\psi_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{s}_i - \mathbf{r})$, les nœuds sont les sommets du maillage. De plus il est nécessaire de modifier l'équation (10), car les nœuds sont des points où la surface portée par le maillage n'est pas régulière. On doit plutôt écrire:

$$\forall r \in S_{pq} \quad (\Omega(\mathbf{r}, p) \sigma_p + \Omega(\mathbf{r}, q) \sigma_q) V(\mathbf{r}) = 4\pi \sigma_o V_o(\mathbf{r}) - \sum_{kl} (\sigma_k - \sigma_l) \int_{S_{kl}} V(\mathbf{r}') \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{n}_{kl} ds' \quad (21)$$

$\Omega(\mathbf{r}, k)$ est l'angle solide sous lequel on voit la surface $\partial\Omega_k$ depuis le point \mathbf{r} , pour un point \mathbf{r} de S_{pq} on a $\Omega(\mathbf{r}, p) + \Omega(\mathbf{r}, q) = 4\pi$ et si la surface est régulière au voisinage de \mathbf{r} , alors $\Omega(\mathbf{r}, p) = \Omega(\mathbf{r}, q) = 2\pi$ (mais ce n'est pas le cas pour un sommet du maillage). Il faut adapter le système linéaire en conséquence:

$$H_{ij} = \frac{(\Omega^+(\mathbf{s}_i) \sigma_i^+ + \Omega^-(\mathbf{s}_i) \sigma_i^-)}{4\pi} \delta_{ij} \quad (22)$$

$$+ \sum_{T_j(kl)} \left(\frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{4\pi} \int_{T_j(kl)} \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l) (\mathbf{s}_i - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_T}{\mathbf{s}_j \cdot (\mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l) \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds' \right) \quad (23)$$

$\Omega^+(\mathbf{s}_i)$ et $\Omega^-(\mathbf{s}_i)$ sont les angles solides déterminés par les deux régions qui bordent la surface à laquelle appartient \mathbf{s}_i . La somme $\sum_{T_j(kl)}$ porte sur tous les triangles qui pointent en \mathbf{s}_j . Pour l'assemblage de la matrice nous suivons de Munck [5]. Il montre comment calculer les coefficients non diagonaux de celle-ci, ensuite il fixe la valeur des coefficients diagonaux en imposant que la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice soit nulle. Ainsi la physique du problème est respectée et numériquement le noyau de la matrice est exactement de rang 1, ce qui est important pour le bon fonctionnement de la déflation. Il est à noter que pour le même maillage, il y a deux fois moins d'inconnues en collocation linéaire qu'en collocation constante (puisque'il y a deux fois moins de points que de triangles), mais le calcul des coefficients est nettement plus complexe.

3.3 Méthodes de Galerkin

Dans les méthodes de Galerkin $\phi_i = \psi_i$, fonctions de base et fonctions poids sont identiques. Le système linéaire (16) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_1, V_o \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_n, V_o \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi_1, L(\phi_1) \rangle & \dots & \langle \phi_1, L(\phi_n) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_n, L(\phi_1) \rangle & \dots & \langle \phi_n, L(\phi_n) \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

Le calcul des coefficients H_{ij} de la matrice et $\langle \phi_i, V_o \rangle$ du second membre demandent plus de travail que pour la collocation.

Galerkin constant Dans les méthodes de Galerkin constantes $\phi_i = \psi_i = 1_{T_i}$ indicatrice du triangle T_i . Pour tout couple (i, j) , on a:

$$H_{ij} = \langle \phi_i, L(\phi_j) \rangle = \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{4\pi} \int_{T_i} \left(\int_{T_j} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds' \right) ds \quad \text{si } i \neq j \quad (25)$$

$$= \frac{\sigma_i^- + \sigma_i^+}{2} A(T_i) \quad \text{si } i = j \quad (26)$$

avec σ_j^- la conductivité intérieure et σ_j^+ la conductivité extérieure de la surface portant le triangle T_j (orienté par sa normale \mathbf{n}_j) et $A(T_i)$ l'aire de T_i .

Galerkin linéaire Cette fois-ci, $\phi_i = \psi_i$ est donnée par $\phi_j(\mathbf{r}) = \frac{\det(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l)}{\det(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l)}$ si $\mathbf{r} \in T_{j(kl)}$ et $\phi_j(\mathbf{r}) = 0$ sinon. Les mêmes remarques que pour la collocation

linéaire s'appliquent en ce qui concerne les angles solides et le calcul effectif des coefficients lors de l'implémentation. Pour tout couple (i, j) , on a :

$$H_{ij} = \sum_{T_j(kl)} \left(\int_{T_j(kl)} \phi_i(\mathbf{r}) \frac{(\Omega^+(\mathbf{r}) \sigma_j^+ + \Omega^-(\mathbf{r}) \sigma_j^-)}{4\pi} \phi_j(\mathbf{r}) ds \right) \quad (27)$$

$$+ \sum_{T_i(nm)} \left(\sum_{T_j(kl)} \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{4\pi} \int_{T_i(nm)} \phi_i(\mathbf{r}) \left(\int_{T_j(kl)} \phi_j(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_{T_j(kl)}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds' \right) ds \right) \quad (28)$$

où $\Omega^+(\mathbf{r})$ et $\Omega^-(\mathbf{r})$ sont les angles solides déterminés par les deux régions qui bordent la surface à laquelle appartient \mathbf{r} et les sommes de la forme $\sum_{T_h(pq)}$ portent sur tous les triangles qui pointent en \mathbf{s}_h . Notons que les intégrales sous le signe \sum dans (27) sont non nulles uniquement quand \mathbf{s}_i et \mathbf{s}_j appartiennent à un même triangle (soit $i \in \{j, k, l\}$).

3.4 Calcul des coefficients

Les paragraphes précédents détaillant les coefficients des systèmes linéaires issus des différentes discrétisation ont fait apparaître un certain nombre d'expressions semblables. Dans [5] de Munck montre comment intégrer analytiquement certaines de ces dernières.

Soient un point \mathbf{c} et un triangle T ,

$$\Omega(\mathbf{c}, T) = \int_T \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{c} - \mathbf{r}'\|^3} ds' \quad (29)$$

représente l'angle solide sous lequel on voit T (orienté par \mathbf{n} sa normale) depuis le point \mathbf{c} , Ω admet une expression simple à partir de \mathbf{c} et des sommets $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ et \mathbf{s}_3 de T . On pose

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{c}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{s}_2 - \mathbf{c}, \quad \mathbf{y}_3 = \mathbf{s}_3 - \mathbf{c}$$

$$d = \det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$$

Alors, on a

$$\frac{\Omega}{2} = \text{Arctan} \frac{d}{|\mathbf{y}_1| |\mathbf{y}_2| |\mathbf{y}_3| + |\mathbf{y}_1| (\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_3) + |\mathbf{y}_2| (\mathbf{y}_3 \cdot \mathbf{y}_1) + |\mathbf{y}_3| (\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2)} \quad (30)$$

De Munck montre également comment calculer les intégrales de la forme :

$$\int_{T_j(kl)} \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l} \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_T}{\|\mathbf{c} - \mathbf{r}'\|^3} ds' \quad (31)$$

Mais nous renvoyons à l'article cité plus haut pour le détail. Ces formules permettent de traiter le cas des méthodes de collocation et le calcul du second membre quand la source de courant est une densité surfacique P^0 . Pour les méthodes de Galerkin et le calcul du second membre quand la source de courant est une densité surfacique, il faut intégrer les grandeurs précédentes contre les fonctions de base (le crochet $\langle f, g \rangle$ est une 'vraie' intégrale et ne se réduit plus à une simple évaluation en un point comme en collocation). Nous ne savons pas s'il existe des formules comparables à celles ci-dessus, et avons opté pour une intégration approchée à trois points de Gauss.

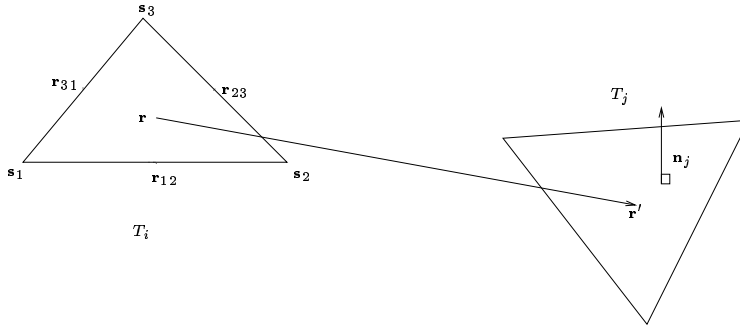


FIG. 1 – *Intégration par points de Gauss: galerkin constant*

En galerkin constant:

$$\begin{aligned}
 h_{ij} &= \int_{T_i} \left(\int_{T_j} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds' \right) ds \\
 &\approx \frac{A_i}{3} \int_{T_j} \left(\frac{(\mathbf{s}_{12} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{s}_{12} - \mathbf{r}'\|^3} + \frac{(\mathbf{s}_{23} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{s}_{23} - \mathbf{r}'\|^3} + \frac{(\mathbf{s}_{31} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{s}_{31} - \mathbf{r}'\|^3} \right) ds' \\
 &\approx \frac{A_i}{3} (\Omega(\mathbf{s}_{12}, T_j) + \Omega(\mathbf{s}_{23}, T_j) + \Omega(\mathbf{s}_{31}, T_j))
 \end{aligned} \tag{32}$$

Et les trois angles solides de cette dernière expression sont intégrés analytiquement d'après [5].

En galerkin linéaire, notons que $\phi_i(\mathbf{r}_{in}) = \phi_i(\mathbf{r}_{mi}) = \frac{1}{2}$ et que $\phi_i(\mathbf{r}_{nm}) = 0$,

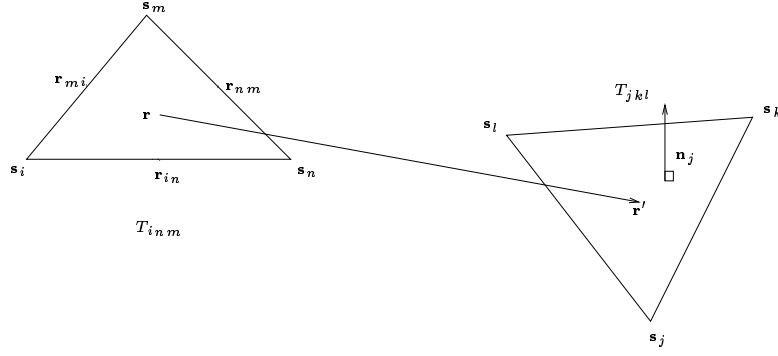


FIG. 2 – Intégration par points de Gauss: galerkin linéaire

de-là:

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= \int_{T_{inm}} \phi_i(\mathbf{r}) \left(\int_{T_{jkl}} \phi_j(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} ds' \right) ds \\
&\approx \frac{A_i}{3} \frac{1}{2} \int_{T_{jkl}} \left(\phi_j(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}'\|^3} + \phi_j(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}_{mi} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{r}_{mi} - \mathbf{r}'\|^3} \right) ds' \\
&\approx \frac{A_i}{6} \left(\int_{T_{jkl}} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l} \frac{(\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}'\|^3} ds' + \int_{T_{jkl}} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l}{\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{s}_k \wedge \mathbf{s}_l} \frac{(\mathbf{r}_{mi} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{r}_{mi} - \mathbf{r}'\|^3} ds' \right)
\end{aligned} \tag{33}$$

Les intégrales restantes sont de la même forme que (31) calculées grâce à [5].
Les intégrales de la forme:

$$f_{ij} = \int_{T_{jkl}} \phi_i(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) ds$$

peuvent être calculées analytiquement (toujours grâce à [5]), ou approchées par:

$$\begin{aligned}
f_{ij} &= \frac{1}{2} \quad \text{si } i = j \\
&= \frac{1}{4} \quad \text{si } i = k, l \\
&= 0 \quad \text{sinon.}
\end{aligned}$$

4 Solutions dégonflées (*Deflated solutions*)

L'utilisation de la BEM nous a conduit à un système linéaire carré

$$\mathbf{V}_o = H \cdot \mathbf{V} \quad (34)$$

H est singulière (le noyau étant engendré par $\mathbf{e} = {}^t[1, \dots, 1]$), de plus il n'est pas certain que \mathbf{V}_o soit dans l'espace image de H , mais si la cohérence du problème physique sous-jacent a été préservée ce devrait être le cas (et d'ailleurs on le vérifie numériquement). Donc si \mathbf{V} est solution de (34), $\mathbf{V} + \lambda \mathbf{e}$ l'est également pour tout réel λ , ce qui va rendre la résolution numérique délicate. En effet si A désigne la matrice produite par le programme, A est régulière mais très proche de H (A est dite presque singulière) et si elle est inversée trop brutalement le résultat risque d'être mauvais: comme $A \cdot \mathbf{e} \approx 0$, la solution trouvée en inversant A par un algorithme standard peut avoir une norme très grande et être assez éloignée des solutions de l'équation (34). Aussi pour la résolution numérique du système nous allons recourir à la technique de *deflation* (dégonflement) présentée par Chan dans [6]. Au lieu de $A \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}_o$ nous allons résoudre le système

$$A_s \cdot \mathbf{V}_d \equiv SA \cdot \mathbf{V}_d = R \cdot \mathbf{V}_o \quad (35)$$

$$N \cdot \mathbf{V}_d = \mathbf{V}_d \quad (36)$$

où S , R et N sont des matrices liées à A . A_s est singulière (noyau de dimension 1) et "proche" de A et $R \cdot \mathbf{V}_o$ est consistant (i.e. dans l'image de A_s) et proche de \mathbf{V}_o . L'équation (36) est une contrainte visant à rendre \mathbf{V}_d unique et de norme petite. La solution \mathbf{V} de (34) sera alors décomposée en $\mathbf{V} = \mathbf{V}_d + \lambda \mathbf{U}$ où $\mathbf{V}_d \cdot U = 0$. Suivant les choix de S , R et N il existe plusieurs décompositions possibles. Chan montre que sous des conditions assez générales, quand S , R et N sont données \mathbf{V} existe et est unique. Une des façons de procéder repose sur la factorisation L, U de A

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & * \\ & \epsilon & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

où l'on suppose (quitte à permuter les colonnes et les lignes de A) que ϵ le k -ième élément diagonal de U est petit (en particulier devant les autres termes diagonaux) mais non nul et que c'est lui qui traduit la quasi-singularité de A . Pour que la *deflation* soit efficace il faut que ϵ soit de l'ordre de la plus petite valeur singulière de A . Notons pour tout $1 \leq p \leq n$, $\mathbf{e}_p = {}^t[0, \dots, 1, \dots, 0]$

(le 1 en p-ième position) et si \mathbf{u} est un vecteur, u_p sa p-ième composante. Définissons alors

- \mathbf{v}_{lu} l'unique vecteur de norme 1 et $\alpha \geq 0$ le réel tels que ${}^tA \cdot \mathbf{v}_{lu} = \alpha \mathbf{e}_k$
- pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout vecteur \mathbf{u} tel que $u_i \neq 0$, $E_{\mathbf{u}}^i = I - \frac{1}{u_i} \mathbf{u} \cdot {}^t\mathbf{e}_i$
- j l'entier tel que $(v_{lu})_j$ soit le plus petit coefficient de v_{lu} .
- \mathbf{v}_e l'unique vecteur de norme 1 et $\beta \geq 0$ le réel tels que $A \cdot \mathbf{v}_e = \beta \mathbf{e}_j$

Posons

- $S = R = {}^tE_{\mathbf{v}_{lu}}^j$,
- $N = E_{\mathbf{u}_e}^k$,

on a alors

$$A_s = A - \frac{\alpha}{(v_{lu})_j} \mathbf{e}_j \cdot {}^t\mathbf{e}_k$$

A_s est obtenue à partir de A en perturbant le coefficient d'ordre (k, j) par une quantité qui est un $O(\epsilon)$. Le choix de N assure l'unicité de \mathbf{V}_d et fait de \mathbf{V} l'unique solution de $A_s \cdot \mathbf{V} = R \cdot \mathbf{V}_o$ telle que $V_k = 0$. \mathbf{V} et \mathbf{V}_d sont liés par

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_d + \frac{{}^t\mathbf{v}_{lu} \cdot \mathbf{V}_o}{(v_{lu})_j} \beta \mathbf{u}_e \quad (37)$$

et on passe facilement de \mathbf{V}_d à \mathbf{V} . Voyons maintenant l'algorithme proposé par Chan pour calculer \mathbf{V}_d . Premièrement \mathbf{v}_{lu} et \mathbf{u}_e sont calculés à partir de la décomposition L, U de A en faisant des pivots, après quoi on calcule \mathbf{V}_d en se donnant \mathbf{w} tel que $N \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}$ et en itérant jusqu'à convergence

$$\begin{cases} 1) \mathbf{r} = R \cdot \mathbf{V}_o - SA \cdot \mathbf{w} \\ 2) \text{Resoudre } A \cdot \mathbf{d} = \mathbf{r} \\ 3) \mathbf{w} + \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{w} \end{cases}$$

Chan donne également la démonstration de la convergence de l'algorithme pour les choix de S , R et N qui ont été faits. La stabilité de l'algorithme est garantie par le fait que N et A_s ont le même vecteur nul à droite \mathbf{u}_e : l'étape 3) corrige l'erreur due à l'inversion dans l'étape 2).

5 Solutions analytiques

Une configuration particulière du problème direct pour le dipôle de courant est celle où le conducteur homogène est constitué de couches sphériques concentriques dans lesquelles la conductivité σ est constante. Dans ce cas étudié depuis longtemps, il existe une solution analytique du potentiel créé à la surface du conducteur sous forme d'une série infinie. Cela fournira une base de comparaison des méthodes numériques employées. Dans [7] Zhang a proposé une formulation pratique de la série ainsi qu'une façon rapide de la calculer. Considérons donc un conducteur sphérique composé de N couches homogènes. Le potentiel dû à un dipôle de courant $\mathbf{J}^p = \delta(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}) \mathbf{Q}$ en point

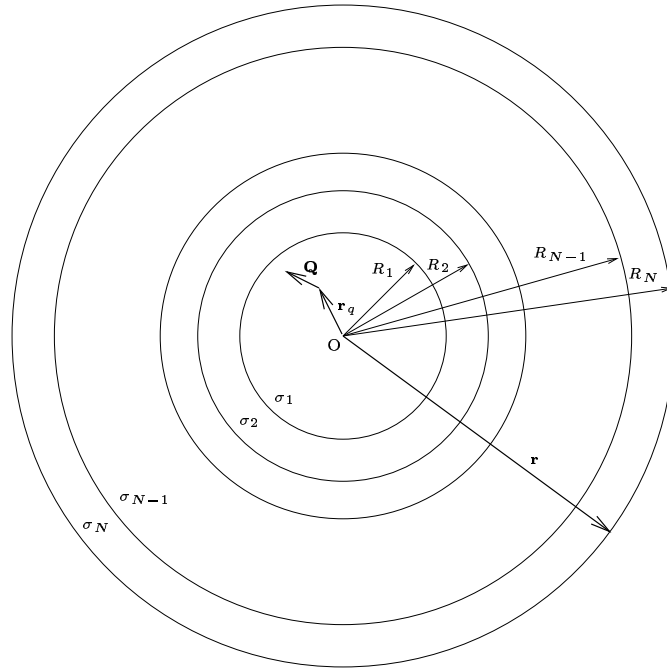


FIG. 3 – N sphères homogènes

\mathbf{r} de la surface ∂S_N est donné par

$$V_N(\mathbf{r}_q, \mathbf{Q}, \mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\sigma_N r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \left(\frac{r_q^2}{r^2} \right)^{n-1} f_n [n \cos \alpha P_n + \cos \beta \sin \alpha P_n^1(\cos \gamma)] \right)$$

où P_n et P_n^1 désignent les polynômes de Legendre et les polynômes de Legendre associés, f_n est donné par

$$f_n = \frac{n}{n m_{22} + (n+1) m_{21}}$$

et

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{11} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(2n+1)^{N-1}} \prod_{k=1}^{N-1} \begin{bmatrix} n + (n+1) \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} & (n+1) \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} - 1 \right) \left(\frac{r}{R_k} \right)^{2n-1} \\ n \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} - 1 \right) \left(\frac{r}{R_k} \right)^{2n+1} & (n+1) + n \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} \end{bmatrix}$$

(le produit de ces matrices, qui ne commutent pas, est effectué avec k croissant de gauche à droite) Dans le cas d'une seule sphère homogène il existe des expressions beaucoup plus compactes, le potentiel V_1 est somme de deux termes V_{1r} et V_{1t} (r pour radial et t pour tangentiel) et suivant [8] on peut écrire:

$$\begin{aligned} V_{1r}(\mathbf{r}_q, \mathbf{Q}, \mathbf{r}) &= c_1 \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{Q} \\ V_{1t}(\mathbf{r}_q, \mathbf{Q}, \mathbf{r}) &= c_2 (\mathbf{r}_q^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_q) (\mathbf{r}_q \cdot \mathbf{Q})) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d &= \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\| \\ c_1 &= \frac{1}{4\pi\sigma_1 \mathbf{r}_q^2} \left(2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_q}{d^3} + \frac{1}{d} - \frac{1}{r} \right) \\ c_2 &= \frac{1}{4\pi\sigma_1 \mathbf{r}_q^2} \left(\frac{2}{d^3} + \frac{d+r}{rd(rd+r^2-\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_q)} \right) \end{aligned}$$

Dans le cas multicouche où l'évaluation de la série est inévitable, Berg et Scherg [9] ont proposé une méthode pour accélérer les calculs. Elle consiste à exprimer ce cas à partir du cas de la sphère homogène, plus précisément ils écrivent

$$V_N(\mathbf{r}_q, \mathbf{Q}, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^J V_1(\mu_j \mathbf{r}_q, \lambda_j \mathbf{Q}, \mathbf{r})$$

Les μ_j et λ_j sont des paramètres (dits de Berg) qu'il convient d'ajuster, J représente le nombre de dipôles (du cas monosphérique) utilisés pour simuler le cas d'un dipôle dans le conducteur multisphérique. Berg et Scherg ont

montré que même avec un J très petit (par exemple 3), on peut avoir une bonne approximation. Toujours dans [7], Zhang calcule les paramètres de Berg en minimisant

$$\Delta = \sum_{n=1}^{N_{max}} \left[\left(\frac{\mathbf{r}_q}{R_n} \right)^{n-1} \left(f_n - \sum_{j=1}^J \lambda_j \mu_j^{n-1} \right) \right]^2$$

et obtient des résultats très satisfaisants.

6 Mise en œuvre du problème direct

6.1 Implémentation

Intéressons-nous maintenant à la programmation. La géométrie du problème et l'assemblage de la matrice ont été réalisés en C++. Quatre classes ont été définies, une de points (vecteurs de R^3), une de triangles (triplets d'entiers), une de maillage (un maillage étant spécifié par le nombre de points et de triangles qu'il contient et deux pointeurs sur les points et les triangles respectivement) et une de géométries (ensemble de maillage et de conductivité dans les zones entre les surfaces maillées). Les maillages des sphères ont été obtenus par projection stéréographique inverse d'un maillage de disque créé avec le logiciel BAMG [10].

La *deflation* a été programmée par R. Keriven en C à l'aide de LAPACK (voir par exemple [11]) et avec des appels de Fortran pour utiliser des routines BLAS [12]. Il est à noter que tous les calculs sont menés en place (ce qui est bienvenu puisque pour des maillages de cerveau corrects A peut occuper plusieurs centaines de méga): pour résoudre $A \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}_o$, la décomposition L, U de A est stockée dans A sous la forme

$$\begin{bmatrix} \ddots & & U \\ L - I & \ddots & \end{bmatrix}.$$

(puisque la diagonale de L ne contient que des 1). Dans l'algorithme de Chan, le choix de S , R et N de la forme $E_{\mathbf{u}}^i = I - \frac{1}{u_i} \mathbf{u} \cdot^t \mathbf{e}_i$ évite d'avoir à stocker de nouvelles matrices (les produits par de telles matrices étant très simples). Quant aux étapes 1) et 2) de l'algorithme qui nécessitent un produit par SA et une inversion de A , on utilise L et U car les routines de BLAS réalisent très efficacement les produits matriciels et les pivots sur des matrices triangulaires stockées comme le sont L et U . Ayant trouvé \mathbf{V}_d on obtient facilement \mathbf{V} , mais en général il a une norme élevée, les calculs ayant été faits en précision double on peut ramener les valeurs de \mathbf{V} autour de 0 (par translation puisque V est défini à une constante prêt). La partie la plus longue du processus est la décomposition L, U , mais ce n'est pas trop gênant car la résolution du problème inverse de la M-EEG passe par la résolution, un grand nombre de fois, du problème direct (et donc la résolution un grand nombre de fois d'un système $A \cdot V = V_o$) or la matrice A ne dépend que de la géométrie du problème (et pas des sources de courant), aussi on calcule $A = LU$ une bonne fois pour toute, ensuite la fin de la *deflation* est très rapide et peut être réalisée un grand nombre de fois en peu de temps.

6.2 Quelques essais

Nous avons fait des essais numériques pour tester nos programmes. La configuration retenue est la suivante: 3 sphères concentriques délimitant trois zone homogènes. Un même maillage comportant 1386 triangles et 695 sommets a été utilisé pour les trois sphères (après dilatation). Plus précisément on a choisit $R_1 = 0.87$, $\sigma_1 = 1$, $R_2 = 0.92$, $\sigma_2 = 0.125$, $R_3 = 1$ et $\sigma_3 = 1$ (ce qui est une approximation grossière du crâne par les proportions et les valeurs de la conductivité), avec un dipôle $\mathbf{J}^p = (2, 2, 0)$ (de valeur arbitraire) que nous avons déplacé de l'origine vers le bord de S_1 en ligne droite. Une fois selon la droite $D1$ d'équation $\{x = z, y = 0\}$ (figure 4, 6 et 8) et une fois le long de $D2$ d'équation $\{x = z = 0\}$ (figure 5, 7 et 9). Dans les figures 4 à 7, pour chaque position du dipole nous avons résolu l'équation (10) par collocation (V_{COL}) ou Galerkin constant (V_{GAL}), et calculé la solution analytique (V_{ANA}) au moyen de la série infinie présentée plus haut. Pour estimer l'écart de la collocation (resp. de Galerkin) par rapport à la solution analytique nous utilisons la valeur moyenne de

$$err = \frac{|V_{ANA} - V_{COL}|}{\Delta_{ANA}} \quad \text{resp.} \quad err = \frac{|V_{ANA} - V_{GAL}|}{\Delta_{ANA}}$$

où Δ_{ANA} est la valeur moyenne de $|V_{ANA}|$. La valeur moyenne est calculée sur la surface externe (sphère de rayon R_3 , correspondant au *scalp*). Il faut préciser que dans la formule (21), nous avons pris $\Omega(\mathbf{r}, i) = \Omega(\mathbf{r}, j) = 2\pi$ ce qui ne semble pas avoir eu de conséquences très marquées.

Les résultats sont conformes à ceux que l'on trouve habituellement dans la littérature (par exemple [13]). Quelque soit la méthode employée l'erreur commise par rapport à la solution analytique est faible quand le dipôle se trouve au centre de la sphère S_1 (de l'ordre de quelques pourcents) et augmente quand le dipôle se rapproche de ∂S_1 , l'explosion ayant lieu pour $R/R1$ voisin de 0.8. On observe dans nos exemples que la collocation linéaire diverge plus rapidement que la collocation constante, mais comme il y a deux fois moins de degrés de liberté et une approximation supplémentaires dans les coefficients, cela n'est pas surprenant. Les méthodes de collocation constante et Galerkin constant conduisent à des résultats très semblables pour ce type de géométrie. L'utilisation de véritables maillages de crâne avec des surfaces plus accidentées que les sphères ci-dessus départagera peut-être les deux méthodes.

Erreur le long de la droite D1

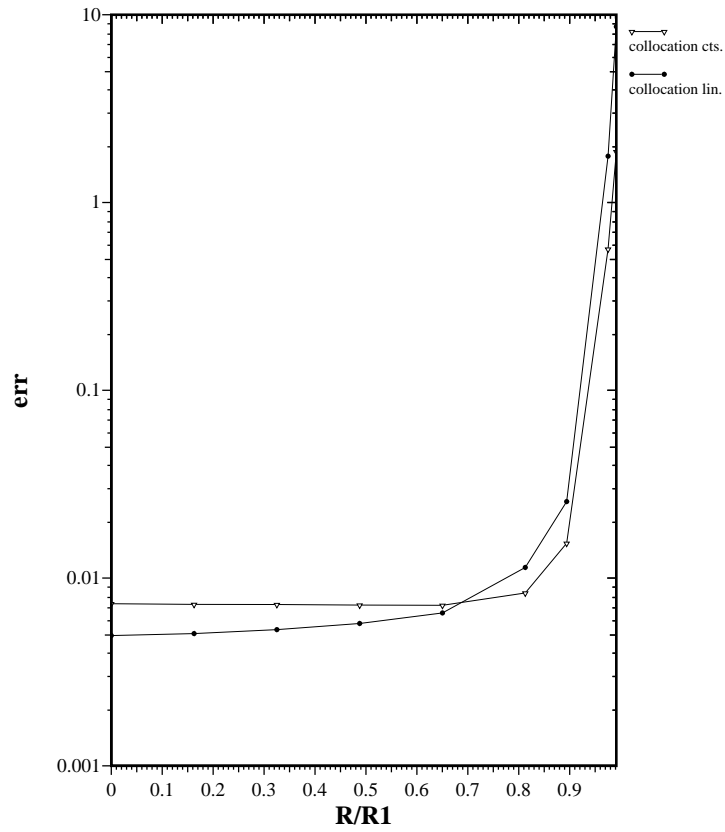


FIG. 4 – écart de la collocation par rapport à la solution analytique

Erreur le long de la droite D2

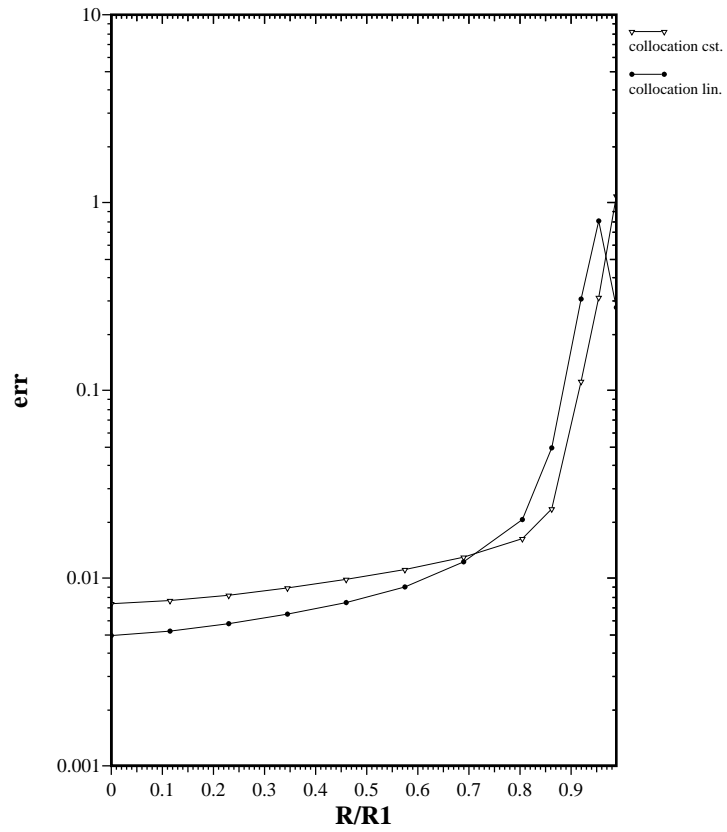


FIG. 5 – écart de la collocation par rapport à la solution analytique

Erreur le long de la droite D1

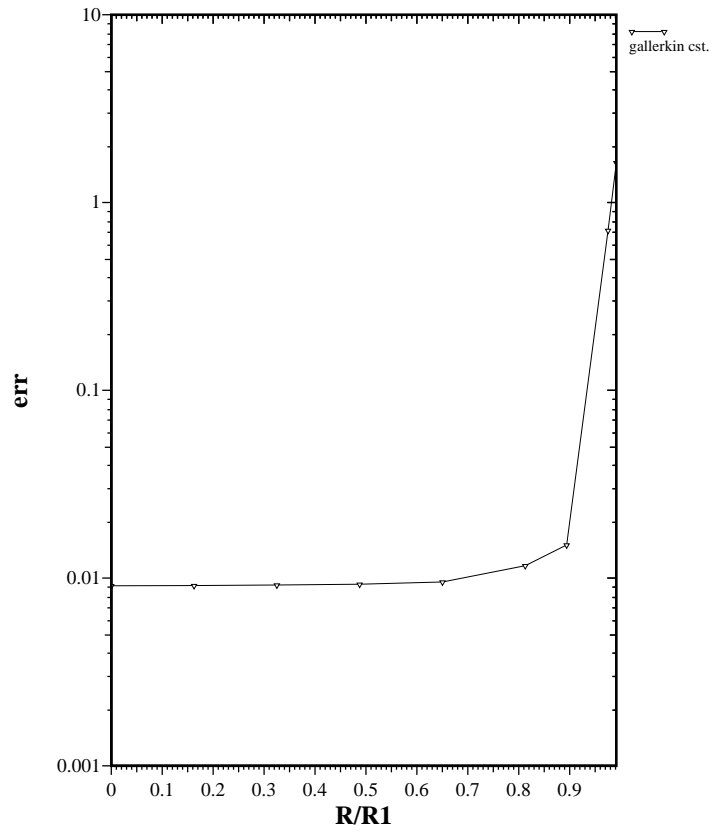


FIG. 6 – écart de Galerkin constant par rapport à la solution analytique

Erreur le long de la droite D2

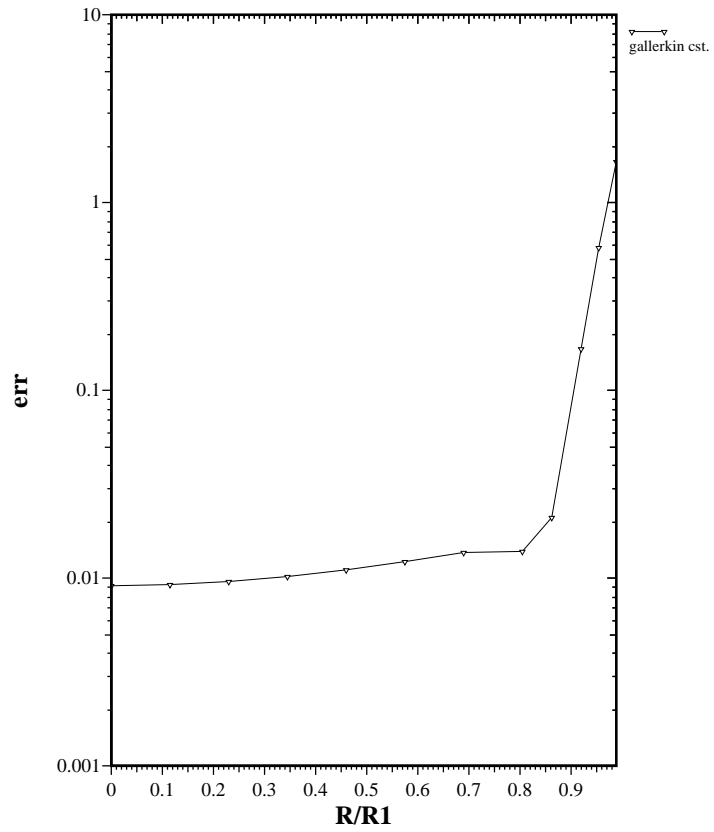


FIG. 7 – écart de Galerkin constant par rapport à la solution analytique

Erreur le long de la droite D1

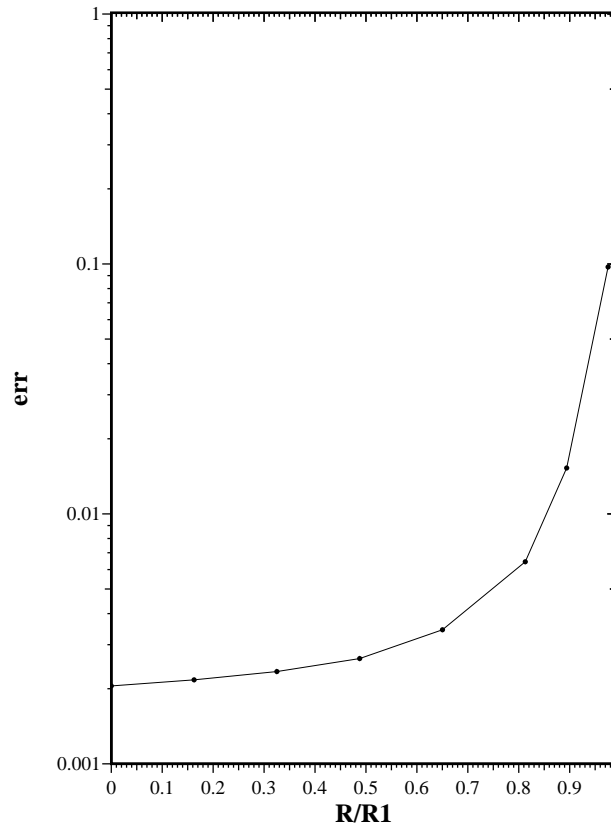


FIG. 8 – écart de Galerkin constant par rapport à la collocation constante

Erreur le long de la droite D2

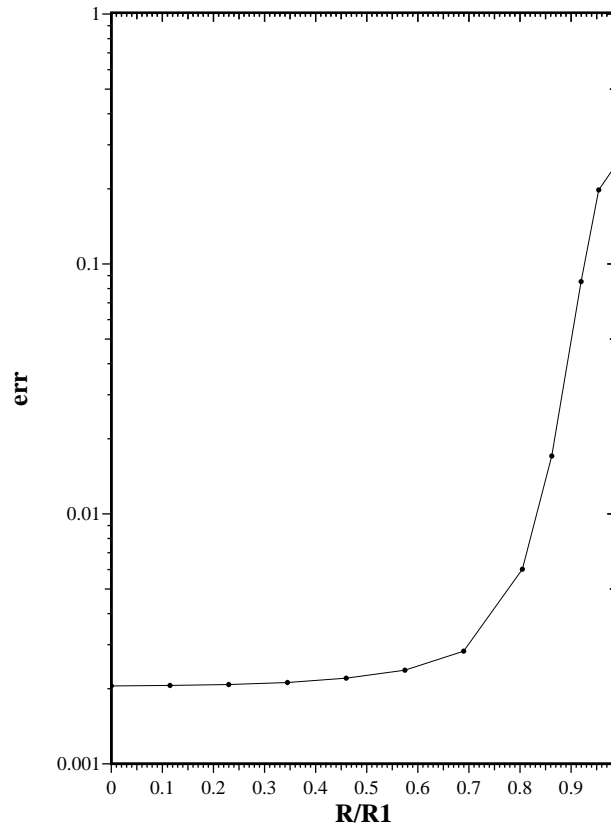


FIG. 9 – écart de Galerkin constant par rapport à la collocation constante

6.3 Remarques diverses

Dans le travail qui vient d'être exposé, nous avons suivi le chemin ouvert par d'autres, pour avoir un premier aperçu de la M-EEG 3D. Les résultats de nos premiers essais sont en accord avec ce qui a déjà été publié, ce qui est encourageant. Quelques remarques peuvent cependant être faites.

Concernant les méthodes de collocation, en collocation linéaire des adaptations ont été proposées par certains auteurs (par exemple [13]) pour répartir les poids des coefficients diagonaux de la matrice du système sur les autres coefficients (nous ne savons pas exactement avec quel succès). Il existe également des formules analytiques pour calculer les coefficients dans le cas de la collocation quadratiques [5], mais elle semble peut pratiquée.

A propos de la résolution du système linéaire, il faut noter qu'en 1984, année de publication de l'article de Chan sur la *deflation*, tous les calculs étaient effectués en précision simple avec du matériel beaucoup moins puissant que maintenant, les problèmes de stabilité numérique étaient donc plus sensibles. Quelques essais avec des méthodes itératives ont été faits pour résoudre le problème direct (même si a priori la situation ne s'y prête pas). Dans certain cas il y a convergence vers des potentiels de norme très élevée, mais que l'on peut recentrer autour de zéro sans perdre la signification des résultats (grâce à la précision double des calculs). Dans d'autre cas, quand la taille du système linéaire est plus grande cela ne fonctionne pas. Il semble donc que la *deflation* soit inévitable.

S'il est usuel de travailler avec des modèles de tête sphériques, cela ne saurait suffire. L'utilisation de maillages plus réalistes (obtenus à l'aide de scanners, d'IRM) est inévitable pour l'application en vue dans la M-EEG 3D. Quelques essais ont été menés par R. Keriven avec un fantôme de crâne humain (figures 10 à 12 affichées grâce à un programme écrit sous VTK [14] par R. Lerallut) obtenu auprès de l'équipe de R. Leahy et C. Mosher du Los Alamos National Laboratory; les résultats concordent avec les leurs. Avec ces fantômes de crâne deux problèmes surgissent, d'une part on ne dispose plus de solutions analytiques pour la comparaison, or les surfaces étant plus accidentées il peut se produire certains effets de bord peu perceptibles avec des géométries sphériques. Nous savons que certaines équipes disposent de crânes remplis de gelée conductrice dans lesquels des électrodes jouent le rôle de dipôles de courant. Cela devrait permettre de tester les méthodes numériques sur des conducteurs plus réalistes aux caractéristiques physiques bien maîtrisées. Autres problème auquel nous serons confrontés à un moment ou à un autre est celui de la taille du système linéaire à inverser. Un maillage assez fin des surfaces entre les différentes zones du crâne nécessiterait beaucoup plus de points que dans nos exemples, et la matrice du système, qui est

pleine, aurait une taille d'un ou plusieurs giga-octets. Se pose la question du stockage de la matrice qui ne tiendra sans doute pas en mémoire et celui de la résolution.

Enfin, il faut rappeler que la résolution du problème direct n'est qu'une étape. L'élaboration d'un outil d'intérêt en MEEG passe ensuite par la résolution du problème inverse, autrement plus compliqué. Le champ magnétique dont nous ne nous sommes pas trop préoccupés pour le moment sera sans doute nécessaire. Mais son utilisation va poser de nouveaux problèmes tant sur le plan numérique que technique.

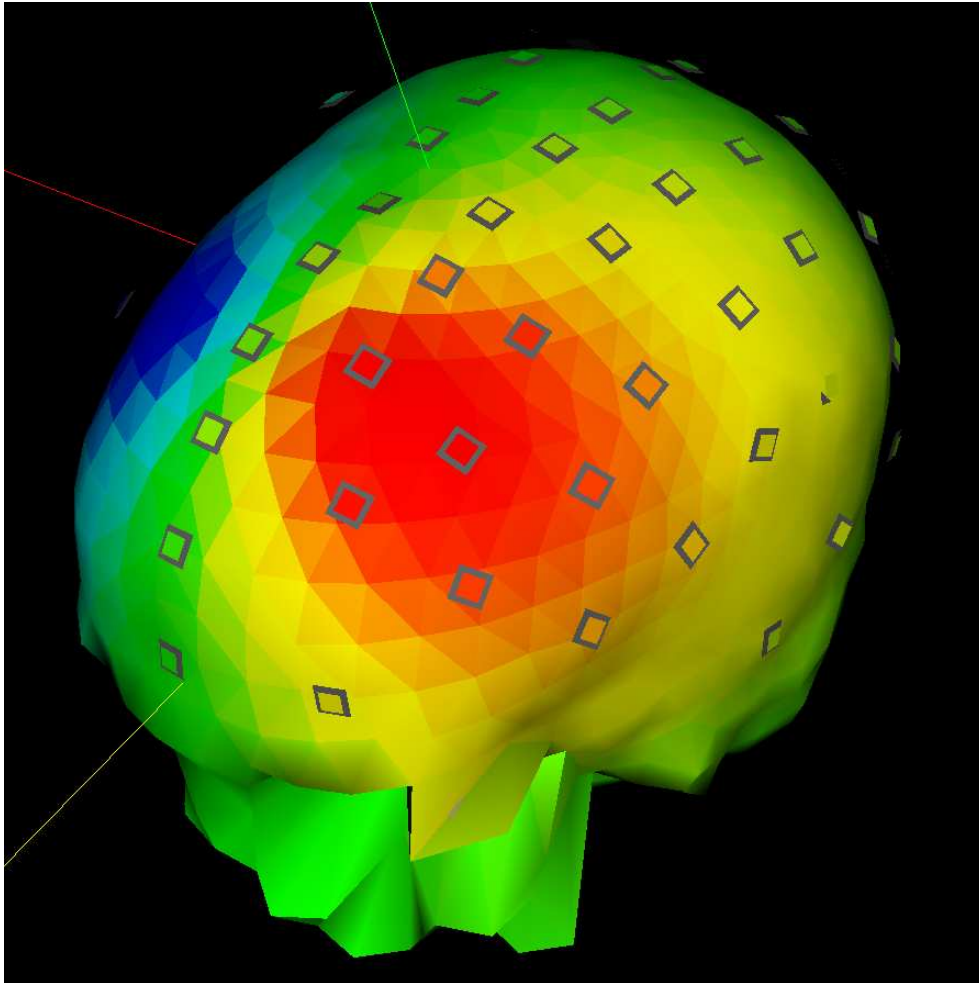


FIG. 10 – *Problème direct EEG sur un fantôme à trois couches (cerveau, crâne et scalp): comparaison BEM collocation constante et valeurs obtenues par R. Leahy et C. Moshier du Los Alamos National Laboratory. Les carrés symbolisent les électrodes.*

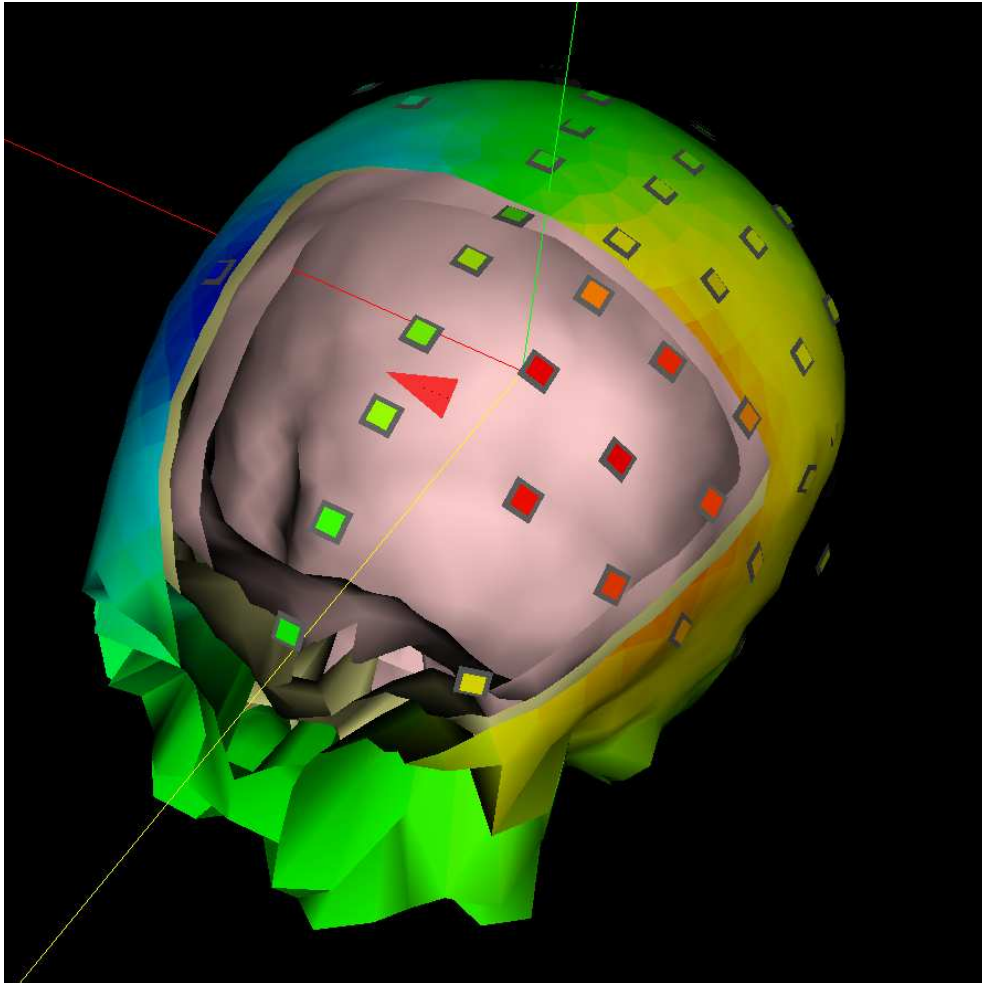


FIG. 11 – *Problème direct EEG sur un fantôme à trois couches (cerveau, crâne et scalp): comparaison BEM collocation constante et valeurs obtenues par R. Leahy et C. Mosher du Los Alamos National Laboratory. Les carrés symbolisent les électrodes, la flèche le dipôle.*

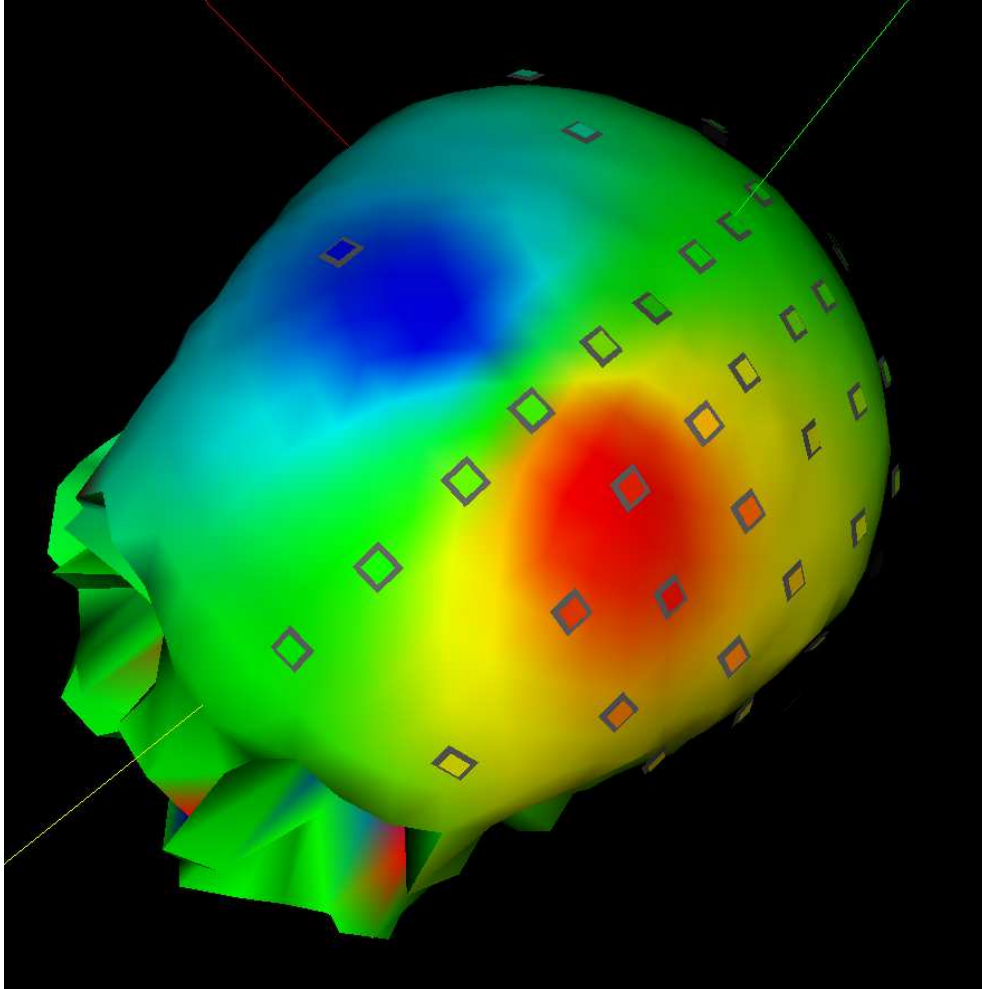


FIG. 12 – *Problème direct EEG sur un fantôme à trois couches (cerveau, crâne et scalp): comparaison BEM collocation linéaire et valeurs obtenues par R. Leahy et C. Mosher du Los Alamos National Laboratory. Les carrés symbolisent les électrodes.*

A Démonstration des équations intégrales

Nous allons maintenant établir les équations (10) et (12) que nous rap-
pelons:

$$\forall r \in S_{ij} \quad \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} V(\mathbf{r}) = \sigma_o V_o(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{kl} (\sigma_k - \sigma_l) \int_{S_{kl}} V(\mathbf{r}') \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{n}_{kl} ds' \quad (38)$$

$$V_o(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_o} \int_{\Omega} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \right) dr' \quad \sigma_o = 1 \quad (39)$$

$$\forall r \in S_{ij} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_o(\mathbf{r}) + \frac{\mu_o}{4\pi} \sum_{kl} (\sigma_k - \sigma_l) \int_{S_{kl}} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_{kl} ds' \quad (40)$$

$$\mathbf{B}_o(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \nabla' \wedge \left(\frac{1}{R} \right) ds' \quad (41)$$

Pour simplifier la rédaction nous allons travailler dans le cas de trois sphères délimitant trois milieux homogènes, avec pour courants primaires un dipôle de courant placé dans le milieu le plus intérieur et situé à l'origine, ($\mathbf{r}_q = \mathbf{0}$). Cette démonstration s'étend immédiatement à une géométrie plus complexe avec un plus grand nombre de surfaces et de sources de courant (éventuellement autres que des dipôles), pourvu que les surfaces soient régulières et que les sources de courant singulières (telles que les dipôle de courant) ne soient pas sur ces surfaces. Le potentiel électrique V satisfait l'équation:

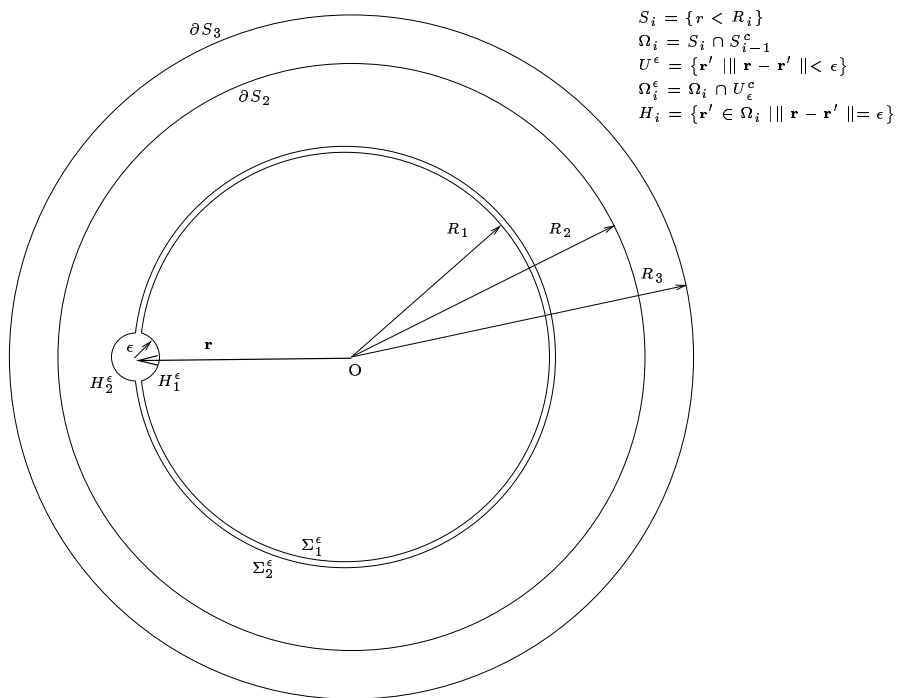
$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = \nabla \cdot \vec{J}^p$$

avec la condition de continuité:

$$\left[\sigma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right] = 0$$

y compris sur la frontière extérieure: $\sigma_{ext} = 0$. Soit, par exemple \mathbf{r} appartenant à $S_{12} = \partial S_1$, on suppose que $S_{12} = \partial S_1$ est régulière au voisinage de \mathbf{r} . Pour obtenir l'équation intégrale en vue, on souhaite utiliser la formule de Green:

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma}{R} \Delta' V - V \Delta' \left(\frac{\sigma}{R} \right) dr' = \int_{\partial\Omega} \frac{\sigma}{R} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} - V \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\sigma}{R} \right) ds'$$



Les surfaces (fermées) $\partial\Omega_i$ ont leur normale qui pointe vers l'extérieure

FIG. 13 – 3 sphères

Il faut cependant prendre quelques précautions dans l'emploi de cette dernière, à savoir éviter \mathbf{r} singularité de $\frac{1}{R}$, travailler sur des domaines où σ est constante et passer ensuite à la limite. Posons

$$W = -\frac{1}{4\pi}(\nabla \cdot \mathbf{J}^p) * \frac{1}{r} \quad (42)$$

où l'on rappelle que \mathbf{J}^p est un dipole de courant de position $\mathbf{r}_q = \mathbf{0}$, et d'intensité \mathbf{Q} . On dispose des relations suivantes:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\ \nabla W &= \frac{1}{4\pi r^3} \left(\mathbf{Q} - 3 \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} \right) \\ \Delta W &= \mathbf{J}^p \end{aligned}$$

W est défini dans $\mathcal{D}'(R^3)$, W et ∇W sont de classe C^∞ dans $R^3 \setminus \{0\}$. Définissons également pour tout $i = 1, 2, 3$ et tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} S_i &= \{r < R_i\} \\ \Omega_i &= \{R_{i-1} < r < R_i\} \\ U_\epsilon &= \{\mathbf{r}' \mid \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| < \epsilon\} \\ \Omega_i^\epsilon &= \Omega_i \cap U_\epsilon^c \\ H_i^\epsilon &= \{\mathbf{r}' \in \Omega_i \mid \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \epsilon\} \\ \Sigma_1^\epsilon &= \partial(\Omega_1 \cap U_\epsilon^c) \\ \Sigma_2^\epsilon &= \partial(\Omega_2 \cap U_\epsilon^c) \end{aligned}$$

Dans Ω_i on pose :

$$U_i = V - \frac{1}{\sigma_i} W$$

(*****!)(En fait $U_i = V$ dans chaque région ne contenant pas de source de courant, i.e. pour $i \neq 0$ dans la situation étudiée). U_i vérifie alors:

$$\begin{cases} \Delta U_i = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} & \text{sur } \partial \Omega_i \end{cases}$$

ce qui garantit la régularité de U_i , par les théorèmes classiques sur les équations elliptiques. Appliquons la formule de Green à U_i dans le domaine Ω_i^ϵ (cf. figure 13)

$$\int_{\Omega_i^\epsilon} \frac{\sigma_i}{R} \Delta' U_i - U_i \Delta' \left(\frac{\sigma_i}{R} \right) dr' = \int_{\partial \Omega_i^\epsilon} \frac{\sigma_i}{R} \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{n}} - U_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\sigma_i}{R} \right) ds'$$

Le terme de gauche est nul puisque ΔU_i et $\Delta \frac{1}{R}$ sont nuls dans le domaine considéré. Dans Ω_1^ϵ , on a :

$$\int_{\partial\Omega_1^\epsilon} \frac{\sigma_1}{R} \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}} ds' = \int_{\Sigma_1^\epsilon} \frac{1}{R} \left(\sigma_1 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_1} \right) ds' \\ + \int_{H_1^\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \left(\sigma_1 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_1} \right) ds'$$

et

$$- \int_{\partial\Omega_1^\epsilon} U_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\sigma_1}{R} \right) ds' = \int_{\Sigma_1^\epsilon} (W - \sigma_1 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_1 ds' \\ + \int_{H_1^\epsilon} (W - \sigma_1 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_1 ds'$$

Dans Ω_2^ϵ , on a :

$$\int_{\partial\Omega_2^\epsilon} \frac{\sigma_2}{R} \frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{n}} ds' = \int_{\Sigma_2^\epsilon} \frac{1}{R} \left(\sigma_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_2} \right) ds' \\ + \int_{H_2^\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \left(\sigma_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_2} \right) ds' + \int_{\partial S_2} \frac{1}{R} \left(\sigma_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_2} \right) ds'$$

et

$$- \int_{\partial\Omega_2^\epsilon} U_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\sigma_2}{R} \right) ds' = \int_{\Sigma_2^\epsilon} (W - \sigma_2 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds' \\ + \int_{H_2^\epsilon} (W - \sigma_2 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds' + \int_{\partial S_2} (W - \sigma_2 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds'$$

Enfin dans Ω_3^ϵ , on a :

$$\int_{\partial\Omega_3^\epsilon} \frac{\sigma_3}{R} \frac{\partial U_3}{\partial \mathbf{n}} ds' = \int_{\partial S_3} \frac{1}{R} \left(\sigma_3 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_3} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_3} \right) ds' + \int_{\partial S_2} \frac{1}{R} \left(\sigma_3 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_3} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_3} \right) ds'$$

et

$$- \int_{\partial\Omega_3^\epsilon} U_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\sigma_3}{R} \right) ds' = \int_{\partial S_3} (W - \sigma_3 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_3 ds' \\ + \int_{\partial S_2} (W - \sigma_3 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_3 ds'$$

Remarquons que Σ_1^ϵ et Σ_2^ϵ désignent la même surface orientée par des normales opposées, aussi

$$\int_{\Sigma_2^\epsilon} \frac{1}{R} \left(\sigma_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_2} \right) ds = \int_{\Sigma_1^\epsilon} \frac{1}{R} \left(-\sigma_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_1} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_1} \right) ds$$

d'où

$$\int_{\Sigma_1^\epsilon} \frac{1}{R} \left(\sigma_1 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_1} \right) ds + \int_{\Sigma_2^\epsilon} \frac{1}{R} \left(\sigma_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_2} \right) ds = \int_{\Sigma_1^\epsilon} \left[\sigma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Omega_2}^{\Omega_1} = 0$$

De même on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1^\epsilon} (W - \sigma_1 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_1 ds' + \int_{\Sigma_2^\epsilon} (W - \sigma_2 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds' \\ = (\sigma_2 - \sigma_1) \int_{\Sigma_1^\epsilon} V \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_1 ds' \end{aligned}$$

Quand ϵ tend vers 0, comme $\nabla' \frac{1}{R}$ est intégrable sur ∂S_1 ce terme tend vers

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \int_{\partial S_1} V \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_1 ds'$$

Regardons les intégrales sur H_1^ϵ et H_2^ϵ . Comme ∇W est continu hors de l'origine et que $\sigma \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}$ est borné au voisinage de ∂S_1 , on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{H_1^\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \left(\sigma_1 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_1} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_1} \right) ds' \right) = 0$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{H_2^\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \left(\sigma_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_2} \right) ds' \right) = 0$$

Ensuite en notant que

$$\int_{H_1^\epsilon} \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_1 ds' \quad \text{et} \quad \int_{H_2^\epsilon} \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds'$$

ont même limite 2π (angle solide sous lequel on voit un demi-sphère depuis son centre) car la surface est régulière au voisinage de \mathbf{r} , et que $W - \sigma V$ est continu au voisinage de ∂S_1 , on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{H_1^\epsilon} (W - \sigma_1 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_1 ds' \right) = 2\pi (W(\mathbf{r}) - \sigma_1 V(\mathbf{r}))$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{H_2^\epsilon} (W - \sigma_2 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds' \right) = 2\pi (W(\mathbf{r}) - \sigma_2 V(\mathbf{r}))$$

En considérant ∂S_2 (orientée par \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2), on trouve également

$$\int_{\partial S_2} \frac{1}{R} \left(\sigma_3 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_3} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_3} \right) ds' + \int_{\partial S_2} \frac{1}{R} \left(\sigma_2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_2} \right) ds' = 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_2} (W - \sigma_3 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_3 ds' + \int_{\partial S_2} (W - \sigma_2 V) \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds' \\ = (\sigma_3 - \sigma_2) \int_{S_2} V \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds' \end{aligned}$$

Enfin en utilisant la formule de Green entre la sphère ∂S_3 et une sphère concentrique dont le rayon tend vers l'infini, on montre que

$$\int_{\partial S_3} \left(W \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_3 \right) - \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}_3} \right) ds = 0$$

En sommant tous les termes nous trouvons la formule souhaitée, pour \mathbf{r} appartenant à ∂S_1

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} V(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\pi} \int_{\partial S_1} V \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_1 ds' \\ - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{4\pi} \int_{\partial S_2} V \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_2 ds' - \frac{\sigma_3}{4\pi} \int_{\partial S_3} V \nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}_3 ds' \end{aligned}$$

où W représente le champ dû à un dipôle de courant dans un milieu homogène de conductivité $\sigma_o = 1$

$$W(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Procédons semblablement pour le champ magnétique. On avait établi l'équation générale (8):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_o(\mathbf{r}) - \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma \nabla' V(\mathbf{r}') \nabla' \wedge \left(\frac{1}{R} \right) dr'$$

voyons comment elle se transforme. On définit pour tout $i = 1, 2, 3$ et tout $\epsilon > 0$

$$\mathbf{B}_i^\epsilon(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega_i^\epsilon} \sigma \nabla' V(\mathbf{r}') \nabla' \wedge \left(\frac{1}{R} \right) dr'$$

Alors d'une part

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\mathbf{B}_i^\epsilon(\mathbf{r})) = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega_i} \sigma \nabla' V(\mathbf{r}') \nabla' \wedge \left(\frac{1}{R} \right) dr'$$

et d'autre part

$$\mathbf{B}_i^\epsilon(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega_i^\epsilon} \sigma_i \nabla V(\mathbf{r}') \nabla' \wedge \left(\frac{1}{R} \right) d\mathbf{r}'$$

Dans le domaine considéré on dispose de l'identité

$$\nabla \wedge \left(V \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right) = \nabla(V) \wedge \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + V \nabla \wedge \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla(V) \wedge \nabla \left(\frac{1}{R} \right)$$

dont on déduit via la formule du rotationnel $\int_{\Omega} \nabla \wedge \mathbf{T} d\mathbf{r} = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \wedge \mathbf{n} ds$

$$\mathbf{B}_i^\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o \sigma_i}{4\pi} \int_{\partial\Omega_i^\epsilon} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_i ds'$$

Ainsi on a pour le domaine Ω_1^ϵ

$$\mathbf{B}_1^\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o \sigma_1}{4\pi} \left(\int_{\Sigma_i^\epsilon} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_1 ds' + \int_{H_i^\epsilon} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_1 ds' \right)$$

Le second terme du membre de droite est identiquement nul car sur H_i^ϵ on a $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ qui est évidemment colinéaire à $\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$ quant au premier terme de ce membre, il tend vers $\int_{\partial S_1} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_1 ds'$ lorsque ϵ tend vers 0. Le même raisonnement s'applique pour le domaine Ω_2 . Enfin le terme correspondant au domaine Ω_3 est en fait constant et ne pose aucun problème. En sommant on obtient bien

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \mathbf{B}_o(\mathbf{r}) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\pi} \int_{S_1} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_1 ds' \\ & - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{4\pi} \int_{S_2} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_2 ds' - \frac{\sigma_3}{4\pi} \int_{S_3} V(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{n}_3 ds' \end{aligned}$$

On a travaillé avec un point \mathbf{r} de S_{12} mais on aurait pu tout aussi bien le prendre sur n'importe quelle autre frontière. Cela achève donc la démonstration des équations intégrales (10) et (12) satisfaites respectivement par V et \mathbf{B} .

Références

- [1] Rita Carter. *Atlas du cerveau*. Editions Autrement, 1999.
- [2] Matti Hamalainen, Riita Hari, Risto J. Ilmoniemi, Jukka Knuutila, and Olli V. Lounasmaa. Magnetoencephalography-theory, instrumentation, and applications to noninvasiv studies of the working human brain. *Reviews of Modern Physics*, 65(2), avril 1993.
- [3] O. Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulos, J. Roberts, T. Viéville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst, and D. Lingrand. The inverse EEG and MEG problems: The adjoint state approach I:The continuous case. Technical Report 3673, INRIA, mai 1999.
- [4] D. B. Geselowitz. On bioelectric potential in an homogeneous volume conductor. *Biophysics Journal*, 7(1-11), 1967.
- [5] J. C. de Munck. A linear discretization of the volume conductor boundary integral equation using analytically integrated elements. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 39(9):986–990, 1992.
- [6] Tony F. Chan. Deflated decomposition of nearly singular systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(4):738–754, août 1984.
- [7] Zhang Zhi. A fast method to compute surface potentials generated by dipoles within multilayer anisotropic spheres. *Phys. Med. Biol.*, 40:335–349, 1995.
- [8] John C. Mosher, Richard M. Leahy, and Paul S. Lewis. Matrix kernel for the forward problem in eeg and meg. Technical Report LA-UR-97-3812, Los Alamos National Laboratory, septembre 1997.
- [9] P. Berg and M. Scherg. A fast method for forward computation of multi-shell spherical head models. *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.*, 90:58–64, 1994.
- [10] Frédéric Hecht. BAMG bidimensional anisotropic mesh generator - draft INRIA, octobre 1998.
- [11] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammerling, A. McKenney, S. Ostrouchov, and D. Sorensen. *LAPACK user's guide - Release 2.0*. SIAM, 1994.
- [12] J. Dongarra, J. Du Croz, S. Hammerling, and R. Hanson. An extended set of fortran basic linear algebra subprograms. *ACM Trans. on Math. Soft.*, pages 1–32, 1988.
- [13] A. Stewart Ferguson and Gerhard Stroink. Factors affecting the accuracy of the booundary element method in the forward problem - i: Calculating surface potentials. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 44(1139-1155):11, 1997.

- [14] W. Schroeder, K. Martin, and Loren B. The Visualization toolkit, an *object-oriented approach to 2D graphics*. Prentice Hall PTR, 1996.