Nous nous intéressons à des processus non stationnaires qui proviennent de la déformation d'un processus stationnaire sous-jacent : les processus localement dilatés. Nous cherchons à résoudre un problème inverse : estimer la déformation à partir d'une seule réalisation d'un processus localement dilaté. On peut stationnariser localement un tel processus en approchant l'inverse de la déformation par une transformation affine appropriée. A l'aide d'ondelettes généralisées, obtenues en appliquant le groupe des transformations affines à une fonction localisée, nous pouvons écrire une équation de transport asymptotique, vérifiée à fine échelle par la variance des coefficients d'ondelettes d'un processus localement dilaté. En deux dimensions, après avoir introduit une définition de stationnarité adéquate pour un processus sur une surface courbe quelconque, nous identifions le terme de vitesse à un gradient de texture connu. Pour estimer la covariance, puisque nous nous disposons que d'une réalisation échantillonnée, la moyenne statistique est remplacée par une moyenne spatiale. L'ergodicité est garantie par un résultat de décorrélation des coefficients d'ondelettes du processus localement dilaté. L'estimateur de la dilatation locale proposé est faiblement consistant lorsque la longueur de la réalisation tend vers l'infini. Nous illustrons ces résultats par des exemples numériques en une dimension et en deux dimensions pour la résolution du problème de *Shape from Texture* en vision artificielle.

Mots-clés : Processus non stationnaires, ondelettes, problème inverse, estimation de covariance, ergodicité, gradient de texture, *Shape from Texture*.

We study locally dilated processes, which are deformations of stationary processes. The goal of the thesis is to solve an inverse problem: estimate the deformation given a single realization of a locally dilated process. It is possible to stationarize such a process locally, by approximating the inverse deformation by an appropriate affine transform. Introducing generalized wavelets, obtained by applying the group of affine transforms to a localized function, we can write an asymptotic transport equation, satisfied at small scale by the variance of wavelet coefficients. In two dimensions, after giving a stationarity definition for a process defined on a curved surface, we show the velocity term to be equal to a known texture gradient. Being limited to a single sampled realization for covariance estimation, the sample mean is replaced by a spatial average. Ergodicity is guaranteed through a decorrelation result for wavelet coefficients of a locally dilated process. We propose an estimator for the local dilation which is consistent when the sample length tends to infinity. Numerical experiments illustrate these results, in one dimension as well as in two, for the *Shape from Texture* problem in computer vision.

Keywords : Non-stationary processes, wavelets, inverse problem, covariance estimation, ergodicity, texture gradient, *Shape from Texture*.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Maureen CLERC née GALLAGHER

Analyse par ondelettes de processus localement dilatés, et application au gradient de texture.

Soutenue le 17 septembre 1999 devant le jury composé de

MM.	N. AYACHE	examinateur
	P. FLANDRIN	rapporteur
	B. LAPEYRE	examinateur
	S. MALLAT	directeur de thèse
	G. PAPANICOLAOU	rapporteur
	A. SEGHIER	président

à mes parents, Monique et Fintan,

à mes beaux-parents, Françoise et Jean-Louis

L'idée originale - un goût des maths alimenté par des discussions familiales, renforcé par l'enthousiasme communicatif de quelques professeurs, et mis en pratique dans une ambiance détendue et joviale au cours d'un stage à l'Inria - je n'avais plus le choix: ce serait une thèse en math. app.

Le réalisateur et conseiller artistique - qui n'a cessé de m'encourager, en particulier après un long congé... En travaillant sous la direction de Stéphane Mallat, j'ai pu apprécier sa rigueur scientifique assortie d'une immense créativité mathématique : c'est pour moi une chance et un plaisir de travailler avec lui.

Le décor - deux laboratoires de banlieue: le CERMICS, ce qui se fait de plus top-design dans l'alliance verre-béton-acier de cette fin de siècle ; le CMAP, presque trente ans mais ragaillardi d'un coup de pinceau vert-pomme.

Les acteurs - deux troupes (dont je remercie les chefs successifs, B. Larrouturrou, B. Lapeyre d'une part et J.-C. Nédélec, P.-A. Raviart et V. Giovangigli d'autre part, d'avoir su respecter ma bilocalisation, ce qui n'a rien d'évident). Que de moments agréables passés en compagnie de Benjamin, Jean-François, Emmanuel, Serge, Eric, Bruno, Régis, Daniel, Thierry, mais aussi Aldjia, Natacha, Rita, Jérôme, Rémi, Christophe, Erwan, Yann, Pedro, Paul... et tous ceux qui animent la salle café.

En coulisses - Sébastien m'a périodiquement remonté le moral, Fiona m'a tellement fait rire que j'en oubliais les théorèmes en souffrance, et Isabelle et Alain ont eu le courage de relire mon manuscrit plusieurs fois ! Merci à eux ainsi qu'à Marie et Arnaud, Omar et Marie, François et Claire.

La régie - des trésors de gentillesse et d'efficacité sont déployés quotidiennement par Imane et Sylvie d'une part, et Geo, Jeanne, Liliane et Nathalie d'autre part - et qui plus est dans la bonne humeur.

Le producteur - le Corps des Ponts, auquel je suis très reconnaissante d'avoir été à l'écoute de tous mes projets, à travers Christian Romon.

Le jury - Patrick Flandrin et George Papanicolaou ont accepté très spontanément de rapporter sur cette thèse, et je les remercie vivement de l'intérêt qu'ils montrent ainsi pour mon travail : c'est pour moi un honneur qu'ils assistent à ma soutenance. La présence au sein du jury d'Abdellatif Seghier, qui suit cette aventure depuis plusieurs années, ainsi que de Bernard Lapeyre et de Nicholas Ayache, me touche aussi beaucoup.

Table des matières

Index des principales notations

*	complexe conjugué
$\langle f, g\rangle$	produit scalaire $\int f(x)g^*(x)dx$

Espaces

L^2	$\{f \mid \int \lvert f(x)\rvert^2 dx < \infty\}$	
H^1	espace de Sobolev classique	
$H_{\boldsymbol{v},s}$		équation (2.12)
$L_{\boldsymbol{v},S}$		équation (2.11)

Fonctions

$a(x)$	fonction d'amplitude	équation (0.1)
$c(\delta)$	covariance de R	équation (2.3)
$c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})$	covariance tangentielle décentrée de R	équation (3.11)
$d(x)$	dilatation locale	Définition 0.1
$p(x)$	projection perspective inverse	équation (1.6)
$\psi_{u,s}$	ondelette de position u et d'échelle s	équation (2.26)
$\psi_{\boldsymbol{u},S}$	warplet de position $\boldsymbol{u}$ et d'échelle S	équation (2.56)
$r(x, y)$	covariance de R	équation (2.2)
$r_P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	covariance tangentielle de R	équation (3.10)
$w(u, s)$	variance des coefficients d'ondelettes	équation (2.40)
$w(\boldsymbol{u}, S)$	variance des coefficients de warplets	équation (2.64)

Matrices

J_u	dérivée Jacobienne de d	Introduction
$J(p)_u$	dérivée Jacobienne de p	paragraphe 1.3.4
S	échelle des warplets	équation (2.56)

Normes

$\|\|S\|\|$	plus grande valeur singulière de la matrice S	paragraphe 2.5.1
$\|\|K\|\|^2_{L_{v,s}}$	norme de l'opérateur K restreint à $L_{v,s}$	équation (2.14)

Opérateurs

D	opérateur de dilatation locale	Définition 0.1
D_u	déformation tangente à D	Définition 2.1
K_X	opérateur de covariance du processus X	équation (2.4)
$T_{(u,s)}$	transformation affine	équation (2.25)

Processus

F	processus localement dilaté	Définition 0.1
F_v	processus stationnarisé	Définition 2.1
R	processus stationnaire	Définition 0.1
R_P	processus relevé au point P	Définition 3.1

Paramètres

Δ	taille du moyennage	paragraphe 4.1
δ	paramètre tel que $\Delta = N^{-\delta}$	paragraphe 4.1
$[-a, a]$	support de l'ondelette mère	
P	nombre de moments nuls	paragraphe 4.2.2
N	taille du signal	paragraphe 4.1

Relations

$\mathcal{O}(\cdot)$	$f(s) = \mathcal{O}(g(s))$ si $\|f(s)/g(s)\|$ est borné lorque $s \to 0$

Introduction

Quel est le point commun entre la photographie d'une pelouse et la sirène d'une voiture de police lancée à toute allure? Bien que la photographie soit définie dans l'espace à deux dimensions, et que le son produit par la sirène se déroule dans le temps, la propriété commune à ces deux objets est la déformation d'un motif à l'origine uniforme, ou stationnaire. Dans la photographie d'une pelouse, les brins d'herbe paraissent rétrécir au lointain par effet de perspective. Et la sirène de police subit un changement de hauteur lorsque la voiture est en mouvement, à cause de l'effet Doppler. Le type de déformation commun à ces deux exemples est une *dilatation locale* que l'on note $d(x)$. Dilatation "locale" signifie simplement que le facteur de dilatation/compression, qui est la dérivée $d'(x)$ de la dilatation locale, varie dans l'espace (pour la photographie) ou au cours du temps (pour la sirène, x représente le temps), contrairement à une dilatation uniforme $d(x) = ax$ où le facteur de dilatation a est uniforme.

Processus localement dilatés

Passer du stationnaire au non stationnaire

Les processus stationnaires sont des processus dont la loi est indépendante de la position, à la différence des processus non stationnaires. La théorie des processus stationnaires est maintenant bien établie, en particulier l'analyse spectrale par la transformée de Fourier (Yaglom [73]). L'analyse des processus non stationnaires, ne serait-ce qu'au second ordre, est plus difficile : l'opérateur de covariance n'est plus un opérateur de convolution, donc n'est plus diagonalisé dans la base de Fourier.
On distingue différentes classes de processus non stationnaires, parmi lesquels on peut citer les processus localement stationnaires (Dahlhaus [24, 25], Mallat et al. [48]), les mouvements browniens multifractionnaires (Papanicolaou et Sølna [54], Benassi, Cohen, Istas [7]). Une préoccupation commune à la plupart des travaux sur les processus non stationnaires est de définir en

quel sens ils peuvent être approchés par des processus stationnaires : différents auteurs ont introduit pour cela différentes définitions d'un processus stationnaire tangent (Priestley [59], Zurbenko [74], Keich [41]).

Un modèle qui rentre dans le cadre des processus localement stationnaires est le filtrage d'un processus stationnaire avec un opérateur pseudo-différentiel d'une certaine régularité. Il existe des exemples physiques de tels processus : un signal de parole est le résultat du filtrage par la glotte (dont la réponse impulsionnelle varie au cours du temps) du souffle (qui est un signal stationnaire produit par les poumons).

Nous étudions dans cette thèse une classe de processus non stationnaires, qui ont eux aussi une relation étroite avec des processus stationnaires. Contrairement aux processus localement stationnaires, qui peuvent être approchés localement par la convolution d'un processus stationnaire avec un certain noyau, les processus qui nous intéressent peuvent être approchés localement par la dilatation d'un processus stationnaire : nous les appelons *processus localement dilatés*.

Définition 0.1 (Processus localement dilaté). *Un* processus localement dilaté *$F(x)$ est la déformation d'un processus stationnaire au sens large R par l'opérateur de dilatation locale D défini par*

$$F(x) = DR(x) = a(x)\ R(d(x)) \tag{1}$$

où $a(x)$ est une fonction positive régulière, et $d(x)$ est une fonction croissante.

La déformation D est généralement due à un phénomène physique, que nous souhaitons analyser, l'exemple le plus connu étant l'effet Doppler, qui déforme un signal stationnaire émis par un véhicule, à cause de la vitesse de ce dernier. Notre but est d'estimer a et d à partir d'*une seule réalisation* du processus F. Les fonctions a et d peuvent être supposées soit déterministes, soit stochastiques, mais dans ce dernier cas, nous chercherons à estimer non pas leur lois, mais simplement les réalisations de a et de d qui ont produit la réalisation de F que nous avons à étudier.

Pour estimer a à une constante près, il suffit d'estimer la variance de F car

$$E\{|F(x)|^2\} = a(x)^2 E\{|R(0)|^2\}\ .$$

En renormalisant F par sa variance, le processus $\frac{F(x)}{E\{|F(x)|^2\}^{1/2}}$ satisfait à l'équation

$$\frac{F(x)}{E\left\{|F(x)|^2\right\}^{1/2}} = \frac{R(d(x))}{E\left\{|R(0)|^2\right\}} \ .$$

On étudiera donc les processus localement dilatés sans la fonction $a(x)$:

$$F(x) = DR(x) = R(d(x)) \tag{2}$$

Stationnarisation

On peut voir un processus $F = DR$ comme la déformation d'un processus stationnaire. La stationnarité de R s'exprime comme une invariance par rapport aux translations. Soit K_R l'opérateur de covariance de R, qui vérifie pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle K_R f, f\rangle = E\left\{|\langle R, f\rangle|^2\right\} \ ,$$

et soit T_v l'opérateur de translation par v. Pour toute fonction f de $H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\nabla_v \langle K_R T_v f, T_v f\rangle = 0 \ .$$

Si l'on applique à F l'opérateur D^{-1}, on obtient donc un processus R qui est globalement invariant vis-à-vis des translations. Mais on peut aussi stationnariser F en lui appliquant un opérateur D_v^{-1}, qui est tangent à D^{-1}, de façon à obtenir un processus $F_v = D_v^{-1} F$ qui soit *localement* invariant vis-à-vis des translations.

Le Théorème 2.2 montre, dans le cadre général des déformations opérant sur des fonctions de $\mathbb{R}^n$, qu'un processus stationnarisé F_v satisfait à une équation de conservation : pour des fonctions $\psi_s(x) = \frac{1}{s^n}\psi(x/s)$, où ψ est à support compact,

$$\nabla_v \langle K_{F_v} T_v \psi_s, T_v \psi_s\rangle = \mathcal{O}(s)\frac{1}{s^n}\|K_R\|^2_{L_{v,s}} \tag{3}$$

où $\|K_R\|_{L_{v,s}}$ est la norme de l'opérateur K_R dans un espace de fonctions localisées.

Nous appliquons ensuite cette théorie de la stationnarisation aux processus localement dilatés en une et en deux dimensions.

En une dimension

Si f est une fonction régulière et si $|x|$ est petit,

$$Df(u+x) = f(d(u+x)) \approx f(d(u) + d'(u)x) \ .$$

L'opérateur D peut ainsi être localement approché par une transformation affine. On stationnarise donc le processus $F = DR$ en lui appliquant un opérateur D_v^{-1} tangent à D^{-1}, et choisi au sein des transformations affines. Le Théorème 2.3 montre comment choisir cet opérateur tangent pour que $D_v^{-1}F$ soit stationnarisé.
Appliquées à une fonction ψ régulière, à support compact et oscillante, les transformations affines génèrent une famille d'ondelettes

$$\psi_{u,s}(x) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{x-u}{s}\right) .$$

La variance des coefficients d'ondelettes du processus F,

$$w(u,s) = E\left\{|\langle F, \psi_{u,s}\rangle|^2\right\}$$

est aussi égale à $\langle K_F\psi_{u,s}, \psi_{u,s}\rangle$. Les ondelettes migrent par transformation affine, car ces transformations forment un groupe ; le Théorème 2.3 montre que l'équation de conservation (3) du processus stationnarisé se transpose, grâce à la migration des ondelettes en une équation de transport :

$$(1+\mathcal{O}(s))\frac{\partial}{\partial u}w(u,s) - \frac{d''(u)}{d'(u)}\frac{\partial}{\partial \log s}w(u,s) = 0 . \qquad (4)$$

Nous montrons dans le Théorème 2.1 que seul $d''(x)/d'(x)$ peut être déterminé de façon unique à partir d'un processus localement dilaté. L'équation (4) a donc extrait du processus localement dilaté F toute l'information possible sur la dilatation locale.

En deux dimensions

Les processus localement dilatés bidimensionnels sont des processus de la forme $F(\boldsymbol{x}) = R(d(\boldsymbol{x}))$, où cette fois, $d(\boldsymbol{x})$ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, telle que sa matrice jacobienne dans un repère (x_1, x_2)

$$J_{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \frac{\partial d_1}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) \\ \frac{\partial d_2}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \frac{\partial d_2}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}$$

soit inversible pour tout $\boldsymbol{u}$. Nous introduisons un groupe de transformations affines où le paramètre S est une matrice inversible :

$$T_{\boldsymbol{u},S}f(\boldsymbol{x}) = (\det S)^{-1}f(S^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})) .$$

En appliquant cette transformation affine à une fonction régulière, à support compact et oscillante, on obtient une famille de fonctions, baptisées *warplets* car elle subissent non seulement des rotations et des dilatations, mais aussi des déformations. On peut suivre la même démarche de stationnarisation qu'en une dimension : le Théorème 2.7 montre que la variance des coefficients de warplets $w(u, S)$ satisfait à une équation de transport, dans laquelle le rôle de la vitesse est joué par les quatre éléments matriciels du gradient normalisé de la jacobienne de la dilatation locale :

$$J_{\boldsymbol{u}}^{-1}\nabla_{\boldsymbol{u}}J_{\boldsymbol{u}} \ . \tag{5}$$

Gradient de texture

Nous souhaiterions appliquer l'étude de processus localement dilatés bidimensionnels au problème de *Shape from Texture*, afin d'estimer la forme d'une surface texturée à partir d'une seule image. Pour cela, il faut comprendre à quoi sont dues les déformations de texture observées dans l'image.

Changement de métrique Des travaux récents en *Shape from Texture* (Gårding [32], Malik et Rosenholtz [45]), qui sont résumés dans la section 1.3, ont mis en évidence la relation entre d'une part les variations du changement de métrique entre la surface et l'image (appelées *gradient de texture*), et d'autre part les paramètres géométriques de la surface, que l'on cherche à estimer. Le gradient de texture de Malik et Rosenholtz est de la forme (5), où J_u représente le changement de métrique local entre la surface et l'image. Comme la théorie des processus localement dilatés repose sur une hypothèse de stationnarité du processus $R(x)$ sous-jacent, le lien entre cette théorie et *Shape from Texture* passe par une hypothèse de stationnarité sur la texture originale.

Quelle hypothèse de stationnarité ? Des études physiologiques (Rosenholtz et Malik [61]) montrent qu'une hypothèse de stationnarité de la texture est importante pour la perception du relief, mais il est très délicat de donner un sens mathématique précis à cette notion (Kanatani et Chou [40], Malik et Rosenholtz [45], Gårding [33]). Le cas d'une surface développable est l'exception : dans ce cas, il suffit d'imposer que la texture obtenue en déroulant la surface soit stationnaire au sens classique sur $\mathbb{R}^2$.

Une définition locale de la stationnarité est suffisante pour le problème de *Shape from Texture*, car les variations du changement de métrique, qui sont définis localement, permettent de récupérer la surface. La Définition 3.1 introduit le processus relevé R_P en un point P d'une surface, et nous montrons dans la Proposition 3.1 que l'intensité d'une image perspective d'une surface texturée peut s'écrire, localement autour d'un point $\boldsymbol{u}$ de la façon suivante :

$$F(\boldsymbol{x}) = R_{p(\boldsymbol{u})}(d^{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})) \ .$$

On ramène ainsi le problème de *Shape from Texture* à un problème *local* de processus localement dilatés bidimensionnels. Le processus relevé $R_{p(\boldsymbol{u})}$ n'est en général pas stationnaire, mais déformé à cause de la courbure gaussienne de la surface. On lui demande de satisfaire à une condition de *stationnarité tangentielle*, introduite dans la Définition 3.2. Sous cette condition, le Théorème 3.1 assure qu'il est possible de stationnariser F dans un voisinage de u. Il en résulte une équation de transport pour le processus F. La vitesse de ce transport est donnée par les quatre éléments matriciels du gradient de texture de Malik et Rosenholtz.

Estimation statistique de la dilatation locale

En pratique, on souhaite estimer la dilatation locale à partir d'une seule réalisation discrète $F(k/N)$ pour $k = 1, \ldots, N$ d'un processus localement dilaté. L'équation de transport (4) permet l'estimation de la fonction de dilatation locale $d(x)$ si l'on sait estimer les dérivées partielles par rapport à la position et à l'échelle de la variance des coefficients d'ondelettes. Pour estimer des variances (i.e. des moyennes statistiques) à partir d'une seule réalisation, il faut un résultat d'ergodicité, c'est à dire l'équivalence, lorsque la taille du signal tend vers l'infini, entre les moyennes statistiques sur les réalisations d'une part, et des moyennes spatiales à partir de notre unique réalisation d'autre part. Les estimateurs des dérivées partielles des variances des coefficients d'ondelettes que nous introduisons au Chapitre 4 sont basés sur des moyennes spatiales.

Un résultat de décorrélation est indispensable, car pour qu'il y ait ergodicité, il faut que les fluctuations statistiques puissent s'annuler par moyenne spatiale, comme si l'on faisait des moyennes sur différentes réalisations. Nous supposons que le processus stationnaire R tel que $F(x) = R(d(x))$ a des coefficients d'ondelettes qui se décorrèlent rapidement à petite échelle (comme c'est le cas pour le mouvement brownien fractionnaire par exemple). Cette hypothèse de décorrélation signifie que l'opérateur de covariance K_R, exprimé dans une base d'ondelettes appropriée a une décroissance rapide autour de la diagonale. Le Théorème 4.1 sur la migration des ondelettes montre qu'une ondelette $\psi_{d(u),sd'(u)}$ se transforme par la dilatation locale D en une fonction

proche de l'ondelette $\psi_{u,s}$. Il en résulte que l'opérateur $K_F = DK_R D^*$, exprimé dans une base d'ondelettes, a lui aussi une décroissance rapide autour de la diagonale. Ce résultat de décorrélation des coefficients d'ondelettes de F est montré dans le Théorème 4.2.
La consistance de l'estimateur de la dilatation locale lorsque $N \to \infty$ est alors prouvée dans le Théorème 4.3.
Les résultats numériques sur des signaux synthétiques et réels illustrent ces résultats mathématiques. Nous nous sommes penchés sur l'analyse de signaux issus de mesures physiques pour la calibration de Lasers à semi-conducteurs. Nous avons constaté que l'algorithme d'estimation de dilatation locale fonctionne sur ces signaux, au sens où les signaux auxquels on applique la dilatation locale inverse de celle qu'on a estimée sont effectivement stationnarisés. Enfin nous montrons une application au problème de *Shape from Texture* pour des images de textures synthétiques.

Plan de la thèse

Le **Chapitre 1** présente trois exemples de processus localement dilatés : l' effet Doppler, des signaux de lasers, et les images en perspective de surfaces texturées. Pour ce dernier exemple, l'accent est mis sur la modélisation des images, ainsi que l'explication détaillée de l'estimation de la forme d'une surface à partir d'un gradient de texture.

Dans le **Chapitre 2**, qui porte sur la stationnarisation des processus localement dilatés, nous introduisons les notions de processus stationnarisé en dimension quelconque, et nous montrons une équation conservation, puis une équation de transport qui permet d'extraire le gradient de la dilatation locale à partir d'un processus localement dilaté.

Le **Chapitre 3** introduit la notion de stationnarité tangentielle, et étend le résultat de stationnarisation des processus dilatés dans ce cadre. Ceci permet l'application de la théorie des processus localement dilatés au problème de *Shape from Texture*.

Le problème de l'estimation statistique de la dilatation locale fait l'objet du **Chapitre 4**. La consistance faible de l'estimateur de la dilatation locale y est démontrée sous une hypothèse de décorrélation du processus stationnaire sous-jacent.

Le **Chapitre 5** présente des résultats numériques.

Chapitre 1

Processus localement dilatés

Avant de commencer l'étude des processus localement dilatés, nous motivons le problème en présentant dans ce chapitre des exemples de tels processus, en une et en deux dimensions. Les deux premiers types de processus sont monodimensionnels, et se déroulent dans le temps : l'effet Doppler est brièvement expliqué dans la section 1.1, puis la section 1.2 décrit un dispositif expérimental en physique des lasers, dans lequel on a pu observer des signaux localement dilatés. Enfin, la section 1.3 est consacrée au problème de théorie de la vision appelé em Shape from Texture.

1.1 Effet Doppler

Une source M_s se déplace à une vitesse $\vec{v}$ en émettant un signal stationnaire monochromatique R vers un récepteur fixe M_r (Figure 1.1). Si c est la vitesse de propagation du son dans le milieu, le signal émis à un instant t_s est reçu par le récepteur à l'instant t_r tel que

$$t_r = t_s + \frac{\left\|\overrightarrow{M_s M_r}\right\|}{c} \ . \tag{1.1}$$

En dérivant (1.1) par rapport à t_r,

$$1 = \frac{dt_s}{dt_r}\left(1 + \frac{1}{c}\frac{d}{dt_s}\left\|\overrightarrow{M_s M_r}\right\|\right) \ , \tag{1.2}$$

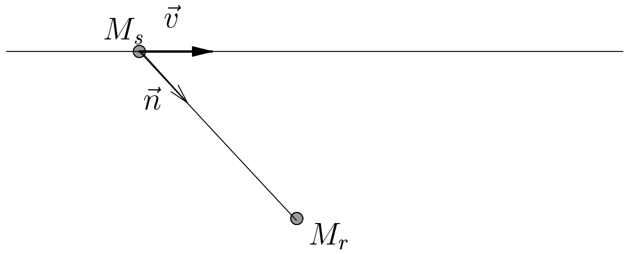


FIG. 1.1 – *Effet Doppler : La source M_s se déplace à une vitesse $\vec{v}$, et le récepteur M_r est fixe. Si le signal émis est monochromatique de fréquence ω_s, le signal reçu a une fréquence $\omega_r = \omega_s/(1 + (\vec{v} \cdot \vec{n})/c)$, où c est la vitesse de propagation du son.*

et, M_r étant fixe, $\frac{d}{dt_s}\left\|\overrightarrow{M_sM_r}\right\| = \vec{v} \cdot \frac{\overrightarrow{M_sM_r}}{\left\|\overrightarrow{M_sM_r}\right\|}$. On désigne le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{M_sM_r}}{\left\|\overrightarrow{M_sM_r}\right\|}$ par $\vec{n}$ (Figure 1.1). On a donc:

$$\frac{dt_s}{dt_r} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}} . \tag{1.3}$$

La relation entre le signal stationnaire émis R et le signal reçu F est

$$F(t_r) = R(t_s(t_r)) \tag{1.4}$$

où t_s et t_r sont reliés par (1.3). On obtient donc un processus localement dilaté au sens de la définition 0.1.

Remarque 1.1. *Un signal monochromatique émis à une fréquence $\omega_s = 2\pi/\Delta t_s$ devient à la réception un signal de fréquence $\omega_r = 2\pi/\Delta t_r$. Si Δt_s est petit,*

$$\frac{\omega_r}{\omega_s} = \frac{\Delta t_s}{\Delta t_r} \approx \frac{dt_s}{dt_r} .$$

1.2 Lasers

Les lasers à semi-conducteurs sont des lasers continus, dont la fréquence est modulable par l'intensité du courant de polarisation [18]. Cette propriété fait de ces lasers un outil intéressant pour la spectroscopie, pour la mesure de concentrations d'espèces gazeuses dans le cadre d'études de pollution. Le principe de la spectroscopie est de faire passer un rayon lumineux à travers un échantillon gazeux, puis d'analyser le spectre en sortie afin de déterminer l'absorption spectrale du gaz. L'approche des processus localement dilatés se révèle pertinente, pour analyser le contenu spectral d'un tel signal laser, comme le montrent des résultats présentés dans le Chapitre 5. La modélisation précise des signaux de lasers à semi-conducteur devrait faire apparaître l'origine physique de cette dilatation locale.

Spectroscopie gazeuse

Le laser émet une lumière dont la fréquence centrale $\omega_\ell(t)$ dépend du temps. Le signal lumineux $F(t)$ ayant traversé l'échantillon gazeux est le résultat d'une convolution entre le signal lumineux avant la traversée de l'échantillon $F_0(t)$, et le facteur de transmission du gaz, dont la transformée de Fourier est notée $T(\omega)$:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int F_0(\omega) T(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \ .$$

La transformée de Fourier du facteur de transmission est reliée à la concentration c de l'espèce gazeuse par la loi de Lambert-Beer :

$$T(\omega) = \exp(-\alpha(\omega)c) \ ,$$

où $\alpha(\omega)$ est un coefficient spécifique d'absorption spectrale qui dépend du gaz. Ainsi,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int F_0(\omega) \exp(-\alpha(\omega)c) \exp(i\omega t) d\omega \ .$$

Si la lumière du laser avant la traversée de l'échantillon est monochromatique de fréquence ω_0, on obtient

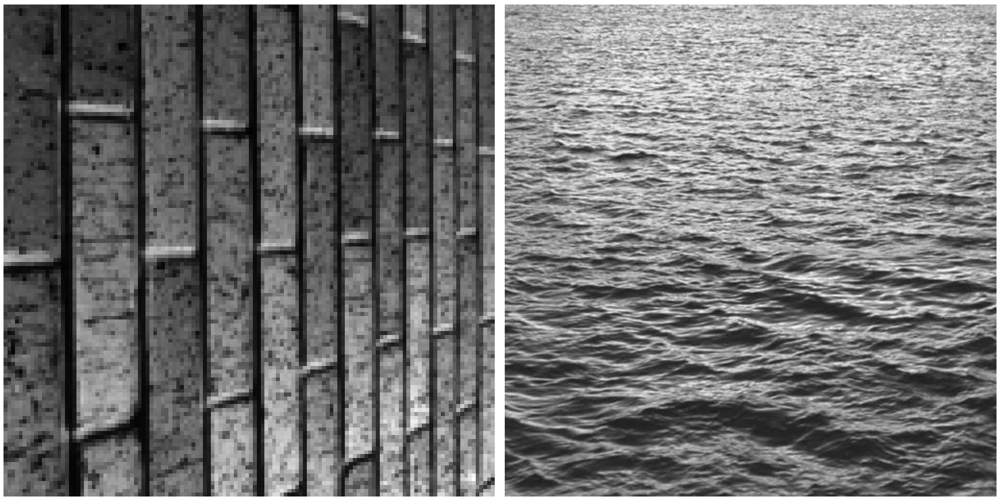
$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\alpha(\omega_0)c) \exp(i\omega_0 t) \ ,$$

et la concentration c peut être calculée à partir de l'intensité lumineuse $|F(t)|$.

Cependant, en pratique, l'intensité, la fréquence centrale, ainsi que la largeur de bande de F_0 varient en fonction de la température, et du vieillissement qui altère les caractéristiques du laser. On ne peut donc en général pas utiliser la formule simple ci-dessus, seulement valable pour les lasers monochromatiques.

Calibration

Il est nécessaire de calibrer le laser en vue de la spectroscopie gazeuse, afin de connaître précisément sa fréquence centrale $\omega_\ell(t)$, son intensité et



(a) (b)

FIG. 1.2 – *Exemples de textures déformées par la perspective.*

sa largeur de bande. Une méthode classique pour l'analyse de la largeur de bande est l'hétérodynage, qui consiste à mélanger le signal étudié à un signal laser stable de même type, dont la largeur de bande est très faible. Le signal résultant de l'interférence de ces deux signaux est centré autour de la différence des deux fréquences, et a une largeur de bande égale à la somme des deux largeurs de bande.
Cette technique nécessite l'emploi d'un signal laser stable, ce qui est irréalisable dans le cas des lasers à semi-conducteurs. On préfère alors recourir à une technique d'homodynage, qui consiste à faire interférer le signal laser à étudier avec une version déphasée de lui-même, en prenant un déphasage suffisamment long pour que les deux signaux qui interfèrent soient décorrélés.

Nous analyserons dans le Chapitre 5, section 5.4, un signal issu d'une technique d'homodynage décrite dans [14], et nous verrons qu'il est pertinent d'appliquer à ce signal un algorithme d'estimation de la dilatation locale. ùtransformée en ondelettes.

1.3 *Shape from Texture*

Après avoir introduit deux exemples monodimensionnels (l'effet Doppler et les signaux de lasers), nous abordons l'exemple des images bidimensionnelles de textures déformées. Le problème de *Shape from Texture* consiste à estimer la forme de la surface à partir d'une image telle que celles représentées dans la Figure 1.3.

1.3.1 Formation d'une image

Avant de pouvoir interpréter une image, il est nécessaire de savoir comment celle-ci a été générée. Nous nous intéressons ici à trois aspects élémentaires de la formation d'une image, qui sont expliqués en détail dans les ouvrages de Ballard et Brown [6] et de Horn [36].

- la *projection perspective*, qui relie géométriquement les points de l'image et ceux de la scène tridimensionnelle ;
- la relation entre l'*intensité* d'un point de l'image et la luminosité du point correspondant dans la scène ;
- la *réflectance*, qui modélise la façon dont une surface réémet la lumière qu'elle reçoit, en fonction des orientations respectives du rayon incident, de la normale à la surface, et du rayon réémis.

Projection perspective

Le sténopé est un modèle simple d'appareil de prise de vues représenté Figure 1.3. Les rayons lumineux sont contraints de traverser un trou infiniment petit situé en O, à une distance l_0 du plan des photorécepteurs. L'*axe optique* est la droite perpendiculaire à l'image et passant par O. On introduit un système de coordonnées centrées en O, dont la direction x_3 coïncide avec l'axe optique. L'orientation du système de coordonnées (O, x_1, x_2, x_3) est montré dans la Figure 1.3.

La projection perspective transforme un point P' de la scène, de coordonnées $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ en un point P de l'image de coordonnées $x = (x_1, x_2, -l_0)$. Puisque OP et OP' sont colinéaires, les coordonnées de P et P' sont proportionnelles :

$$(x_1, x_2, -l_0) = \lambda\ (x'_1, x'_2, x'_3)\ .$$

Le facteur de proportionnalité est clairement $\lambda = -\frac{l_0}{x'_3}$, d'où la relation bien connue entre les coordonnées dans l'image et les coordonnées dans la scène :

$$(x_1, x_2) = \left(-\frac{l_0\ x'_1}{x'_3}, -\frac{l_0\ x'_2}{x'_3}\right)\ . \tag{1.5}$$

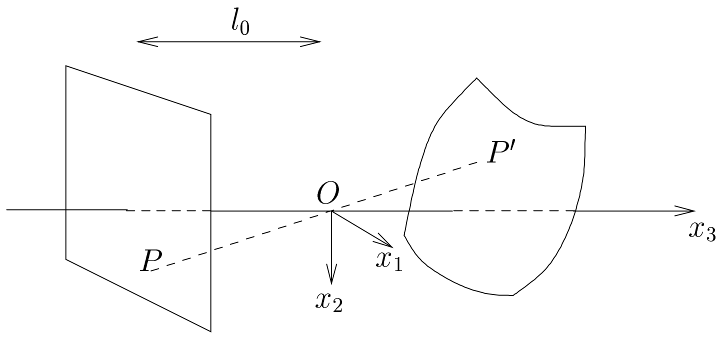


FIG. 1.3 – *Modèle simple d'appareil de prise de vues : le sténopé.*

On désigne par $p(x)$ la réciproque de la projection perspective, qui applique le plan de l'image sur la surface Σ. On a donc la relation

$$(x_1', x_2', x_3') = p(x_1, x_2) \ ,$$

ou encore

$$x' = p(x) \ . \tag{1.6}$$

Illumination

Maintenant que la relation géométrique entre les points de l'image et les points de la scène est établie, nous nous intéressons à la relation entre leurs illuminations respectives. Pour cela nous introduisons deux quantités qui mesurent l'illumination. La première, l'*éclairement* de l'image $F(x)$, est le flux d'énergie lumineuse reçue par l'image à la position x, par unité de surface. La seconde, la *luminance*, est le flux d'énergie $L(x')$ émis par la surface de l'objet à la position x', par unité de surface, par unité d'angle solide.

Pour pouvoir comparer les flux d'énergie lumineuses, il faut introduire un modèle d'appareil de prises de vues plus réaliste comportant une lentille. En effet, une unité de surface de l'objet observé émet de la lumière dans tout un hémisphère. Or le modèle simple su sténopé impose que la lumière ne puisse atteindre l'image que dans une seule direction (i.e. un cône d'angle solide nul). L'énergie lumineuse atteignant l'image en un point par unité de surface est par conséquent nulle. Si l'on décide de remplacer le trou infinitésimal par un trou de diamètre fini, le flux d'énergie lumineuse ne sera plus égal à zéro ; par contre, un point P' de la scène se projettera en un cercle dans l'image. On remédie à ce problème en employant une lentille.

Une lentille parfaite (Figure 1.4) a la propriété de recevoir les rayons lumineux émanant d'un point de la scène selon un angle solide fini, tout en conservant la relation géométrique (1.5) de la projection perspective. La projection perspective n'est valable à strictement parler que pour des points P et P' qui sont à des distances respectives $-x_3$ et x'_3 de la lentille, telles que

$$\frac{1}{-x_3} + \frac{1}{x'_3} = \frac{1}{l_f} ,$$

où l_f est appelée distance focale de la lentille. Donc si l'image est à une distance $-x_3 = l_0$ de la lentille, les points de la scène qui sont nets sont à une distance x'_3 telle que

$$\frac{1}{x'_3} = \frac{1}{l_f} - \frac{1}{l_0} .$$

Pour une lentille de diamètre D et de distance focale l_f, la relation entre

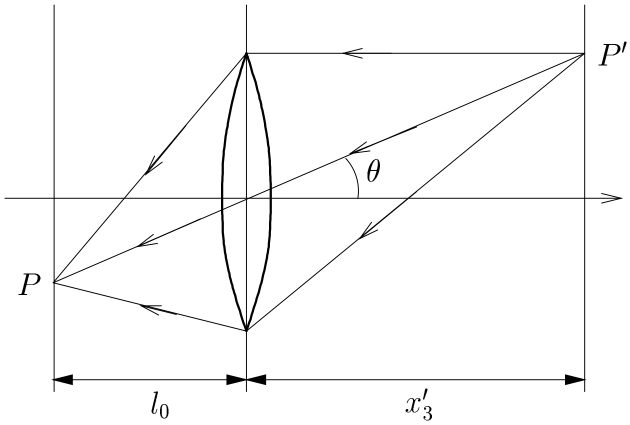


FIG. 1.4 – *Lentille parfaite.*

la luminance L de la surface et l'éclairement F de l'image est une simple relation de proportionnalité :

$$F(x) = L(x') \ \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{l_f}\right)^2 \cos^4\theta \ , \tag{1.7}$$

où θ représente l'angle entre l'axe optique et le rayon passant par P et P' (Figure 1.4). Les systèmes de prise de vues sont généralement calibrés pour éliminer la dépendance en $\cos^4\theta$.

La proportionnalité (1.7) entre $F(x)$ et $L(x')$ montre qu'en mesurant l'éclairement de l'image, on a directement accès à la luminance de la scène.

Réflectance

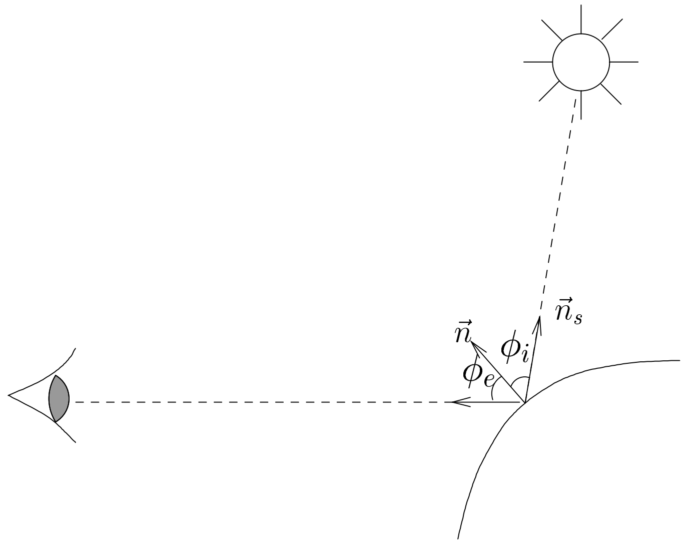


FIG. 1.5 – *L'* incidence *est l'angle ϕ_i entre la normale à la surface $\vec{n}$ et la direction de la source lumineuse $\vec{n}_s$. L'*émittance *est l'angle ϕ_e entre $\vec{n}$ et la direction d'observation.*

La luminance d'une scène dépend à la fois de la quantité de lumière que reçoit la surface (l'illumination), et de la façon dont la surface réfléchit la lumière (la réflectance).
L'illumination est fonction de l'*incidence*, c'est-à-dire l'angle ϕ_i entre la normale $\vec{n}$ à la surface et la direction $\vec{n}_s$ de la source lumineuse (Figure 1.5). On désigne par $e(\phi_i, x')\ \delta\omega_i$ l'énergie lumineuse reçue par la surface en un point $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, issue d'un angle solide $\delta\omega_i$ dans la direction ϕ_i.
La réflectance dépend aussi de l'*émittance*, qui est l'angle ϕ_e entre $\vec{n}$ et la direction d'observation. La réflectance de la surface est modélisée par la fonction

$$r(\phi_e, \phi_i, x') = \frac{\delta l(\phi_e, x')}{e(\phi_i, x')\delta\omega_i} ,$$

qui définit la luminosité apparente d'une portion de surface éclairée sous une incidence de ϕ_i et observée sous l'émittance ϕ_e.
L'éclairement total de la surface est

$$e_0(x') = \int\ e(\phi_i, x')\ \delta\omega_i\ .$$

La luminance de la surface observée sous l'émittance ϕ_e est

$$L(\phi_e, x') = \int r(\phi_e, \phi_i, x')\ e(\phi_i, x')\ \delta\omega_i\ .$$

Nous considérons le cas particulier de surfaces qui réfléchissent toute la lumière qu'elles reçoivent, uniformément dans toutes les directions : la réflectance $r(\phi_e, \phi_i, x')$ ne dépend dans ce cas plus que de la position x', et est notée $R(x')$. De telles surfaces, dites *lambertiennes*, sont des surfaces mates sans spécularité, telles que de la neige, du papier ou des matières poussiéreuses comme la surface de la lune. La luminance de la surface est alors donnée par

$$L(x') = e_0(x')\ R(x').$$

Pour une source de lumière ponctuelle d'intensité e émettant dans la direction $\vec{n}_s$,

$$e_0(x') = e\ \vec{n}(x') \cdot \vec{n}_s\ ,$$

et donc

$$L(x') = e\ R(x')\ \vec{n}(x') \cdot \vec{n}_s\ . \tag{1.8}$$

En regroupant (1.8), (1.7), et (1.6), et en négligeant les constantes multiplicatives, l'intensité $F(x)$ de l'image satisfait la relation

$$F(x) = R(p(x))\ \vec{n}(p(x)) \cdot \vec{n}_s\ . \tag{1.9}$$

Qu'est-ce qu'une texture ?

La texture représente une variation de la réflectance d'un objet à une petite échelle devant la taille caractéristique de l'objet. On peut distinguer deux types de textures principaux.

- Certaines textures sont formées de motifs (des *texels* pour “texture elements”), qui se répètent avec une certaine régularité. L'échelle est alors donnée par la distance caractéristique entre les motifs, ou leur période. Par exemple les motifs décoratifs d'un papier peint ou d'un tissu, l'alignement des briques d'un mur (Figure 1.3(a)), des fenêtres d'une façade, les mailles d'un tricot.
- Pour l'autre type de textures, il n'y a pas de motif apparent, mais on peut mesurer une échelle de corrélation dans les variations de la réflectance : c'est le cas de la Figure 1.3(b) représentant un plan d'eau. Ces textures sont bien décrites dans un cadre stochastique : leur densité spectrale, qui est la transformée de Fourier de leur fonction d'autocorrélation, a de l'énergie aux fréquences spatiales correspondant aux échelles de la texture.

1.3.2 Perception du relief

Avant d'aborder le problème de "shape from texture", nous présentons un panorama des différents modes de perception du relief dans les images (Horn [36], Cavanagh [17]).

A partir de deux images fixes La stéréographie est le principe qui permet de percevoir le relief par comparaison des deux images rétiniennes obtenues par projection perspective de l'image à travers les pupilles droite et gauche. Il est possible de reconstruire le relief d'une scène après avoir estimé la parallaxe (angle entre les axes optiques reliant chacune des deux pupilles à l'objet observé). Pour cela, il est nécessaire de faire la correspondance entre les points de l'image gauche et ceux de l'image droite, et la présence de texture rend délicate cette étape dite d'*appariement*.

A partir d'une séquence temporelle d'images La perception du relief à partir du mouvement dans des séquences temporelles d'images provient du fait que la vitesse apparente d'un objet diminue lorsque sa distance augmente par rapport à l'observateur. C'est principalement ce phénomène qui permet à un pilote d'avion atterrissant de nuit de se positionner par rapport aux balises de la piste.

A partir d'une seule image Bien des indices présents dans une photographie ou un tableau nous renseignent sur le relief de la scène représentée. Pourtant, lorsqu'on observe une image, l'information stéréographique venant de la comparaison des deux images rétiniennes est fausse, puisque l'objet est en réalité plan. On peut d'ailleurs faire l'expérience de fermer un œil pour examiner une photographie ou un tableau : l'impression de relief est considérablement accentuée.

Cette impression est donnée par une combinaison de plusieurs phénomènes :

- *Le flou :* Pour une lentille comme pour l'œil, seuls les points situés à une distance donnée apparaissent parfaitement nets. Au-delà et en deçà de cette distance, leur projection sur le plan de l'image est floue. L'analyse de ce flou donne de l'information sur le relief (Soatto [63]).
- *La transparence :* Selon la distance que le rayon lumineux doit parcourir dans le milieu (en général l'air), certaines fréquences lumineuses sont plus ou moins absorbées. Les techniques de dégradation chromatique qui consistent à employer des teintes plus froides et moins saturées au lointain, sont connues des artistes depuis l'Antiquité.
- *Les effets d'ombre :* L'illumination d'un objet dépend de l'orientation locale de sa surface par rapport à la direction de la source lumineuse, comme le montre l'équation (1.9). Les variations d'illumination sur l'objet nous renseignent ainsi sur sa forme. Ceci peut particulièrement bien être observé dans les tableaux de Georges de la Tour : l'éclairage pro-

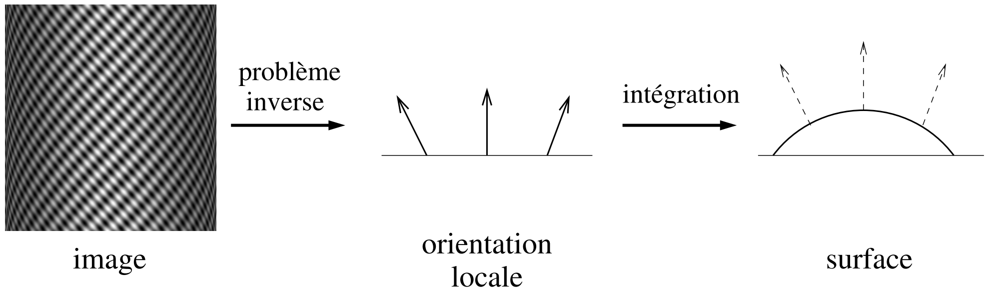


FIG. 1.6 – *Les deux étapes dans la résolution de Shape from texture : on résoud d'abord un problème inverse pour estimer les paramètres géométriques de la surface à partir de certaines grandeurs de l'image, puis on intègre ces paramètres pour retrouver la forme de la surface.*

vient d'une bougie située à proximité de la scène, donc les variations d'orientation entre la normale à la surface des objets et la direction de la source sont très grandes.
L'analyse du relief à partir des variations d'intensité d'une image est un domaine de la théorie de la vision appelé *Shape from Shading*, initié par les travaux de Horn dans les années 1970 (Horn [36], chapitre 10, Clerc et Mallat [20]). Ce domaine a récemment trouvé une formulation élégante avec les solutions de viscosité (Lions, Rouy et Tourin [43]).

– *La perspective sur la géométrie :* Lorsque les peintres de la Renaissance italienne ont maîtrisé la perspective, la représentation du relief s'en est trouvée considérablement améliorée. La position des points et des lignes de fuite d'un tableau permet à l'observateur de se situer par rapport à la scène représentée.
– *La perspective sur la texture :* Considérons un objet matériel dont la surface est texturée. L'image de cet objet, obtenue par une projection, est également texturée, mais avec une texture déformée. Cette déformation a une double origine, la courbure éventuelle de la surface, et la projection, si celle-ci n'est pas orthogonale au plan de l'image. Le mur carrelé de la Figure 1.3(a) est plan, mais à cause de la perspective, la texture formée par l'alignement des carreaux subit une compression. Si la texture définie sur la surface est stationnaire, en un certain sens, la texture projetée sur l'image n'est plus stationnaire à cause de cette compression. L' analyse de la non-stationnarité de la texture dans l'image donne de l'information sur le relief de la surface.

Le problème de perception du relief est un *problème inverse* : il s'agit de retrouver les paramètres géométriques de l'objet à partir des grandeurs mesurées dans l'image. La plupart du temps, l'information géométrique recueillie est locale, et une étape d'intégration est alors nécessaire pour aboutir à la forme globale de l'objet (voir Figure 1.6).

Etant donnée la variété de modes de perception du relief qui coexistent, la reconstruction de la forme passe par une fusion de données, et par la gestion de conflits entre celles-ci, afin de favoriser les interprétations les plus vraisemblables.

1.3.3 Quelle hypothèse pour la texture ?

Pour qu'il soit possible d'estimer la forme d'une surface texturée à partir d'une image, une hypothèse de stationnarité sur la texture qui est définie sur l'image est indispensable (Rosenholtz et Malik [61]).
Rappelons que d'après l'équation (1.9), l'image d'une surface texturée a une intensité $F(x)$ de la forme

$$F(x) = a(x)\ R(p(x)) \ ,$$

où $a(x)$ représente des variations de l'intensité lumineuse reçue par la surface, et R représente la réflectance de la surface, qui varie à cause de la texture. La fonction p est la réciproque de la projection perspective : elle associe à un point x de l'image le point de la surface Σ dont il est l'image par la projection perspective.
Pour donner une idée de la stationnarité pour le processus R défini sur Σ, prenons un modèle unidimensionnel, où Σ est simplement une courbe dans le plan. Il est parfaitement naturel de demander que R soit stationnaire vis-à-vis de l'abscisse curviligne ℓ définie sur Σ. Plus précisément, on introduit un processus stationnaire $R_{p(0)}$ défini sur $\mathbb{R}$, tel que

$$F(x) = R(p(x)) = R_{p(0)}(\ell(p(x)) - \ell(p(0))) \ .$$

La Figure 1.7 illustre ce procédé. En deux dimensions, si Σ est une surface développable, par exemple un cylindre ou un cône, on peut introduire un processus stationnaire $R_{p(0)}$ défini sur $\mathbb{R}^2$, et une fonction ℓ de Σ dans $\mathbb{R}^2$, qui est l'extension à deux dimensions de l'abscisse curviligne, et qui représente le développement de la surface Σ à partir du point $p(0)$ (Figure 1.8).
Ainsi, pour les courbes et pour les surfaces développables, l'intensité de l'image peut s'écrire

$$F(x) = R(d(x)) \ ,$$

où R est un processus stationnaire, et

$$d(x) = \ell(p(x)) - \ell(p(0))$$

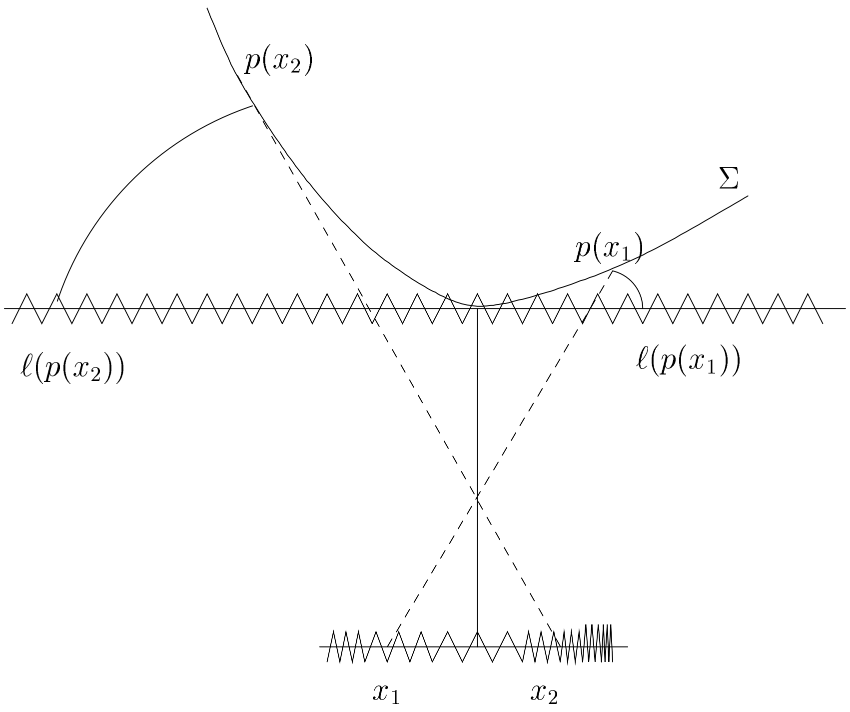


FIG. 1.7 – *A un point x de l'image correspond une position $p(x)$ sur la courbe Σ, d'abscisse curviligne $\ell(p(x))$.*

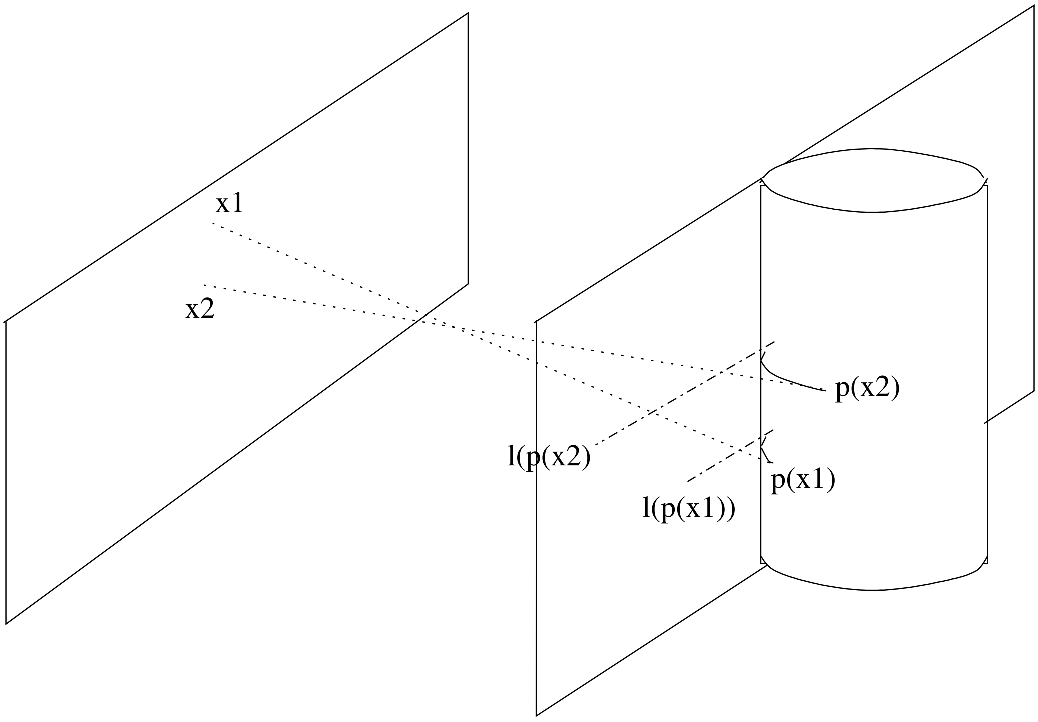


FIG. 1.8 – *Au point x de l'image correspond un point $p(x)$ sur le cylindre, qui lui-même correspond à un point $\ell(p(x))$ sur le développement du cylindre en un plan.*

est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ou de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Dans le Chapitre 3, nous verrons qu'on peut définir pour toute surface, même non développable, un relèvement local de la texture sur le plan tangent, et nous introduirons une notion de stationnarité de la texture relevée, baptisée stationnarité tangentielle.

1.3.4 Géométrie

Nous rappelons dans ce paragraphe le cadre géométrique qui a été présenté par Gårding dans [32]. Le cadre géométrique le mieux adapté consiste à prendre pour variable l'angle de vue $\boldsymbol{u}$, défini sur la sphère unité (voir Figure 1.9). Une relation analytique (appelée *gaze transform*) permet de passer facilement de la direction d'observation $\boldsymbol{u}$ aux coordonnées des points dans l'image.

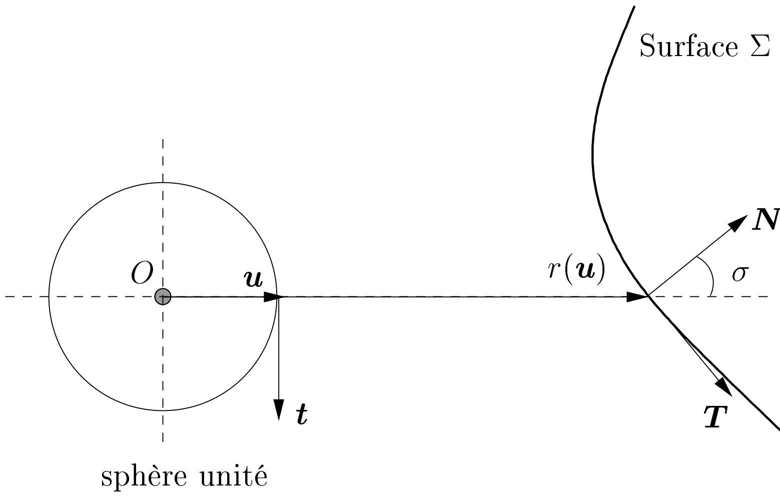


FIG. 1.9 – *A une direction d'observation $\boldsymbol{u}$ correspond une position $p(\boldsymbol{u}) = r(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ sur la surface. Le* dévers $\boldsymbol{t}$ *est dans la direction de variation maximale de $r(\boldsymbol{u})$. La* pente σ *est l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et la normale $\boldsymbol{N}$ à la surface.*

La projection perspective inverse est donnée par

$$p(\boldsymbol{u}) = r(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \ ,$$

où $r(\boldsymbol{u})$ mesure la distance le long du rayon lumineux de direction $\boldsymbol{u}$. La projection perspective inverse est singulière le long des contours apparents de Σ, mais nous ne nous placerons pas dans cette région de l'image, bien que ce soit une région intéressante du point de vue de la perception du relief [19]. Les plans tangents à la sphère unité Σ_0 en $\boldsymbol{u}$, et à la surface Σ en $p(\boldsymbol{u})$ sont respectivement notés $T_{\boldsymbol{u}}(\Sigma_0)$ et $T_{p(\boldsymbol{u})}(\Sigma)$. On définit un repère orthonormé $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b})$ de $T_{\boldsymbol{u}}(\Sigma_0)$ de la façon suivante :

- Le *dévers* $\boldsymbol{t}$ (*tilt* en anglais), est la direction de variation maximale de la distance $r(\boldsymbol{u})$. Si $\nabla_{\boldsymbol{u}} r = 0$, n'importe quelle direction convient, et sinon,
$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{|\nabla_{\boldsymbol{u}} r|} \nabla_{\boldsymbol{u}} r \ .$$
- Le vecteur $\boldsymbol{b}$ est défini par le produit vectoriel
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t} \ .$$

La jacobienne de $p(\boldsymbol{u})$, notée $J(p)_{\boldsymbol{u}}$, est une application linéaire de $T_{\boldsymbol{u}}(\Sigma_0)$ dans $T_{p(\boldsymbol{u})}(\Sigma)$, qui fait correspondre des déplacements infinitésimaux sur la sphère Σ_0 et des déplacements infinitésimaux sur la surface Σ. Le changement local de métrique entre la surface et l'image est donc donné par $J(p)_{\boldsymbol{u}}$.

Les deux vecteurs $J(p)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{t}$ et $J(p)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}$ sont orthogonaux [32], donc les vecteurs renormalisés

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{|J(p)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{t}|} J(p)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{t}$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{|J(p)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}|} J(p)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}$$

forment un repère orthonormé de $T_{p(\boldsymbol{u})}(\Sigma)$. Le produit tensoriel des deux vecteurs tangents définit un vecteur unitaire $\boldsymbol{N}$ normal à la surface :

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{B} \ .$$

L'angle entre la normale et l'angle de vue est appelé la *pente* et est noté σ (*slant* en anglais). C'est par définition l'angle σ entre 0 et $\pi/2$ qui vérifie:

$$\cos\sigma = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u} \ .$$

La fonction distance r ne varie pas dans la direction $\boldsymbol{b}$, car cette direction est par définition orthogonale au gradient de r. Par conséquent, la jacobienne $J(p)_{\boldsymbol{u}}$ dans la direction $\boldsymbol{b}$ est simplement une homothétie par un facteur r :

$$J(p)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b} = r(\boldsymbol{u})\boldsymbol{b} = r(\boldsymbol{u})\boldsymbol{B} \ .$$

Par contre il y a un facteur de dilatation supplémentaire dans la direction $\boldsymbol{t}$, qui est dû à la pente σ :

$$J(p)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{t} = r(\boldsymbol{u})/\cos\sigma\ \boldsymbol{T} \ .$$

On en déduit que $J(p)_{\boldsymbol{u}}$ a une expression simple dans les repères $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b})$ et $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B})$:

$$J(p)_{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} r/\cos\sigma & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/M \end{pmatrix} .$$

Les longueurs m et M ont une interprétation simple : un cercle tracé sur la surface, avec un rayon infinitésimal ϵ se projette sur l'image en une ellipse dont le grand axe, orienté selon $\boldsymbol{b}$, a une longueur $M\epsilon$ et le petit axe, parallèle à $\boldsymbol{t}$, a une longueur $m\epsilon$ (Figure 1.10). La diagonalisation de la jacobienne $J(p)_{\boldsymbol{u}}$ permet la détermination de la pente σ, de la distance r, ainsi que de la direction du dévers t. Cependant, il y a une ambiguïté sur l'orientation de ce vecteur. Ceci provient du fait qu'il existe deux orientations, symétriques

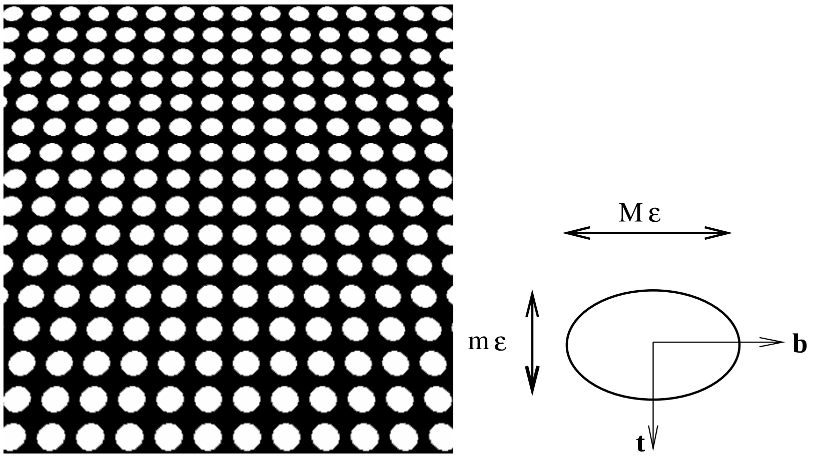


FIG. 1.10 – *Une surface plane sur laquelle sont tracés des cercles se projette par perspective en un image couverte d'ellipses de différentes tailles (à gauche). Un cercle de rayon infinitésimal ϵ se projette sur l'image en une ellipse dont le grand axe, orienté selon $\boldsymbol{b}$, a une longueur $M\epsilon$ et le petit axe, parallèle à $\boldsymbol{t}$, a une longueur $m\epsilon$.*

par rapport à $\boldsymbol{u}$, pour lesquelles un cercle se projette en une ellipse donnée.

Les variations de la normale mesurent la courbure de la surface. Dans le repère $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B})$, on a

$$\begin{bmatrix} \nabla_T \boldsymbol{N} \\ \nabla_B \boldsymbol{N} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_t & \tau \\ \tau & \kappa_b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

où κ_t (resp. κ_b) est la courbure normale dans la direction $\boldsymbol{T}$ (resp. $\boldsymbol{B}$), et τ est la torsion géodésique de la surface dans la direction du dévers.

1.3.5 Gradient de texture

L'estimation de l'orientation et de la forme d'une surface à partir de variations de la texture dans une image est une idée dont l'origine remonte à Gibson [34] en 1950. On appelle *gradient de texture* la mesure de variation dans la texture (Bajcsy et Lieberman [5]). Le problème de *Shape from texture* se décompose en trois étapes principales :

1. la définition d'un gradient de texture, et sa relation aux paramètres géométriques de la surface,
2. la mesure du gradient de texture dans l'image,

3. l'estimation des paramètres géométriques à partir du gradient de texture .

Dans la suite de ce chapitre, nous allons aborder les premier et troisième points. La mesure du gradient de texture sera expliquée dans les chapitres suivants.

Les premiers gradients qui ont été introduits, que l'on appelle *gradients simples*, peuvent se mettre sous la forme

$$\nabla\left(\log f(m, M)\right) \ .$$

Par exemple, on obtient

- Pour $f(m, M) = m$, le *gradient de compression*, qui explique le rétrécissement du petit axe des ellipses avec la distance, dans la Figure 1.10.
- Pour $f(m, M) = M$, le *gradient d'échelle*, qui explique le rétrécissement du grand axe des ellipses avec la distance.
- Pour $f(m, M) = mM$, le *gradient d'aire*, qui explique la diminution de l'aire des ellipses avec la distance.
- Pour $f(m, M) = m/M$, le *gradient d'aplatissement*, qui explique que le petit axe rétrécit plus vite que le grand axe dans la Figure 1.10, d'où l'aplatissement des ellipses.

Tous les gradients simples s'écrivent en fonction du gradient de compression et du gradient d'échelle, car

$$\nabla\left(\log f(m, M)\right) = \frac{\partial \log f}{\partial \log m}\nabla \log m + \frac{\partial \log f}{\partial \log M}\nabla \log M \ .$$

L'expression des gradients de compression et d'échelle dans le repère $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b})$ est la suivante :

$$\nabla(\log m) = \tfrac{\nabla m}{m} = -\tan\sigma \begin{pmatrix} 2 + r\kappa_t/\cos\sigma \\ r\tau \end{pmatrix} , \qquad (1.10)$$

$$\nabla(\log M) = \tfrac{\nabla M}{M} = -\tan\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad (1.11)$$

Comme σ est entre 0 et $\pi/2$, $\tan\sigma \geq 0$. Par conséquent la direction du dévers est toujours opposée à celle de $\nabla \log M$. Le gradient d'échelle lève l'ambiguïté sur le dévers.

En observant (1.10) et (1.11) on constate que seul le gradient d'échelle

$\nabla \log M$ est indépendant des paramètres de courbure. Il peut donc être utilisé pour estimer l'orientation de la surface en l'absence de données sur la coubure. Cependant, l'inconvénient de ce gradient est qu'il est difficile à estimer lorsque la texture originale n'est pas isotrope [32].

Un gradient de texture est intéressant s'il satisfait à deux conditions : il doit être porteur d'information sur la géométrie de la surface, et par ailleurs il doit être facilement mesurable dans l'image (i.e. avec un minimum d'hypothèses sur la texture).

Par exemple, le gradient d'aire $\nabla \log(mM)$ peut être mesuré même lorsque la texture originale est anisotrope, mais comme ce gradient fait intervenir les termes $r\kappa_t$ et $r\tau$, il est difficile d'en déduire l'orientation de la surface lorsque la courbure n'est pas connue. Super et Bovik ont employé le gradient d'aire en considérant non pas une projection perspective, mais une projection orthogonale [65]. Dans ce cas les termes de courbure n'apparaissent pas dans l'expression du gradient, mais il reste l'ambiguïté sur le dévers (voir Kanatani et Chou [40]).

Gårding [32] a remarqué que les gradients simples ne permettent pas de déterminer entièrement la forme locale d'une surface. En effet le paramètre de courbure κ_b n'apparaît pas dans les expressions (1.10) et (1.11) : ceci rend impossible l'estimation de la courbure gaussienne $\kappa = \kappa_t \kappa_b - \tau^2$ et même de son signe, à partir des gradients simples de texture.

Malik et Rosenholtz proposent dans [45] un gradient de texture plus évolué, dont ils montrent qu'il permet la détermination complète de la forme de la surface. De plus, son estimation ne requiert pas d'hypothèse d'isotropie sur la texture originale. Le gradient qu'ils proposent est un gradient de déformation de texture renormalisé, noté

$$\left(J(p)_{\boldsymbol{u}}\right)^{-1} \left(\nabla_{\boldsymbol{u}} J(p)_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v}\right) \ , \tag{1.12}$$

où $\boldsymbol{v}$ est un vecteur unitaire de $T_{\boldsymbol{u}}(\Sigma_0)$. Avec les calculs de Malik et Rosenholtz [45], on peut relier ce gradient aux paramètres géométriques de la surface, y compris les trois paramètres de courbure κ_t, κ_b et τ.

Proposition 1.1. *Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur unitaire de $T_{\boldsymbol{u}}(\Sigma_0)$.*
L'opérateur $J(p)_{\boldsymbol{u}}^{-1} \left(\nabla_{\boldsymbol{u}} J(p)_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v}\right)$ est représenté dans le repère $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b})$ par la matrice

$$\tan\sigma \begin{pmatrix} 2 + \frac{r\kappa_t}{\cos\sigma} & r\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_t + \tan\sigma \begin{pmatrix} r\tau & r\kappa_b \cos\sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_b \ .$$

Preuve Soit $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ un repère orthonormé de $T_{\boldsymbol{u}}(\Sigma_0)$, et $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$ un repère orthonormé de $T_{p(\boldsymbol{u})}(\Sigma)$. On note

$$R_\theta \quad (\text{resp. } R_\Theta)$$

la matrice de rotation d'angle θ (resp. Θ) qui transforme $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ en $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b})$ (resp. $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$ en $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B})$).
La matrice jacobienne $J(p)_{\boldsymbol{u}}$ est représentée dans les repères $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ et $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$ par la matrice

$$J(p)_{\boldsymbol{u}} = R_\Theta \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{pmatrix} R_{-\theta} \ .$$

Si l'on dérive cette expression dans la direction $\boldsymbol{v}$,

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{u}} J(p)_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} = (\nabla_{\boldsymbol{u}}\Theta \cdot \boldsymbol{v}) R_{\pi/2} J(p)_{\boldsymbol{u}} + & \\ R_{-\theta} \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{u}} \left(\frac{1}{m}\right) \cdot \boldsymbol{v} & 0 \\ 0 & \nabla_{\boldsymbol{u}} \left(\frac{1}{M}\right) \cdot \boldsymbol{v} \end{pmatrix} & R_\Theta - J(p)_{\boldsymbol{u}} (\nabla_{\boldsymbol{u}}\theta \cdot \boldsymbol{v}) R_{\pi/2} \ . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J(p)_{\boldsymbol{u}}^{-1} \left(\nabla_{\boldsymbol{u}} J(p)_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v}\right) = & \\ R_\theta \begin{pmatrix} -(\nabla_{\boldsymbol{u}} \log m) \cdot \boldsymbol{v} & -\frac{m}{M}(\nabla_{\boldsymbol{u}}\Theta \cdot \boldsymbol{v}) + \nabla_{\boldsymbol{u}}\theta \cdot \boldsymbol{v} \\ \frac{M}{m}(\nabla_{\boldsymbol{u}}\Theta \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla_{\boldsymbol{u}}\theta \cdot \boldsymbol{v} & -(\nabla_{\boldsymbol{u}} \log M) \cdot \boldsymbol{v} \end{pmatrix} & R_{-\theta} \ . \end{aligned}$$

Si l'on remplace $\nabla_{\boldsymbol{u}} \log m$ et $\nabla_{\boldsymbol{u}} \log M$ par (1.10-1.11), et si on reprend les expressions de $\nabla_{\boldsymbol{u}}\Theta$ et $\nabla_{\boldsymbol{u}}\theta$ prouvées dans [45]

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{u}}\Theta \cdot \boldsymbol{v} &= \left(\frac{r\tau}{\sin\sigma}\right) v_t + (\sin\sigma + \cos\sigma \cot\sigma + r\kappa_b \cot\sigma) v_b \ , \\ \nabla_{\boldsymbol{u}}\theta \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{r\tau}{\cos\sigma \sin\sigma} v_t + \frac{1}{\sin\sigma}(\cos\sigma + r\kappa_b) v_b \ , \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} J(p)_{\boldsymbol{u}}^{-1} \left(\nabla_{\boldsymbol{u}} J(p)_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v}\right) = R_\theta \Bigg(\tan\sigma \begin{pmatrix} 2 + \frac{r\kappa_t}{\cos\sigma} & r\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_t + & \\ \tan\sigma \begin{pmatrix} r\tau & r\kappa_b \cos\sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_b \Bigg) & R_{-\theta} \ , \end{aligned}$$

ce qui prouve la Proposition.
□

1.3.6 Estimation de la surface

En supposant que le gradient de texture (1.12) ait été estimé à partir de l'image, problème qui fera l'objet des prochains chapitres, nous traitons maintenant le problème de l'estimation des paramètres géométriques de la surface.

Avec un changement de repère pour passer du repère $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v})$ au repère $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, la Proposition 1.1 peut se résumer par :

$$J(p)_{\boldsymbol{u}}^{-1} \nabla_{\boldsymbol{v}} J(p)_{\boldsymbol{u}} = R_\theta \left(H_t v_t + H_v v_b \right) R_{-\theta} \ .$$

L'angle θ mesure l'orientation du dévers dans le repère $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, et H_t et H_v sont les deux matrices

$$H_t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ 0 & q_3 \end{pmatrix} , \qquad H_b = \begin{pmatrix} q_2 & q_4 \\ q_3 & 0 \end{pmatrix} .$$

La méthode que nous présentons maintenant pour estimer θ ainsi que les quatre paramètres $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ a été introduite par Gårding dans [33]. L'angle σ et les courbures $r\kappa_t$, $r\kappa_b$, $r\tau$ se déduisent de façon simple de $\boldsymbol{q}$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \arctan q_3 \ , \\ r\kappa_t &= \cos\sigma \left(\frac{q_1}{\tan\sigma} - 2 \right) \ , \\ r\kappa_b &= \frac{q_4}{\sin\sigma} \ , \\ r\tau &= \frac{q_2}{\tan\sigma} \ . \end{aligned} \tag{1.13}$$

Si le vecteur unitaire $\boldsymbol{v}$ a une direction ϕ dans le repère canonique $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, ses coordonnées dans le repère $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v})$ sont

$$v_t = \cos(\phi - \theta) \ , \qquad v_b = \sin(\phi - \theta) \ .$$

Notons $H(\phi)$ la matrice $J(p)_{\boldsymbol{u}}^{-1} \nabla_{\boldsymbol{v}} J(p)_{\boldsymbol{u}}$ avec $\boldsymbol{v}$ dans la direction ϕ. On a clairement

$$H(\phi) = H_x \cos\phi + H_y \sin\phi \ , \tag{1.14}$$

avec

$$\begin{aligned} H_x &= R_\theta (H_t \cos\theta - H_b \sin\theta) R_{-\theta} \ , \\ H_y &= R_\theta (H_t \sin\theta + H_b \cos\theta) R_{-\theta} \ . \end{aligned}$$

On suppose que la matrice $H(\phi)$ peut être estimée dans p directions différentes $(\phi_i)_{i=1\dots p}$ et on note h un vecteur rassemblant les estimations des coefficients $H(\phi)_{ij}$ des matrices $H(\phi_i)$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} \ , \ \text{avec } h_i = \begin{pmatrix} H(\phi_i)_{11} \\ H(\phi_i)_{12} \\ H(\phi_i)_{21} \\ H(\phi_i)_{22} \end{pmatrix} \ .$$

Soit $\hat{h}(\boldsymbol{q}, \theta)$ les composantes calculées à partir de valeurs prédites de $\boldsymbol{q}$ et de θ. Le problème d'estimation consiste à trouver le vecteur des paramètres $(\boldsymbol{q}, \theta)$ qui minimise l'erreur quadratique

$$\left\| \hat{h}(\boldsymbol{q}, \theta) - h \right\|^2 \ .$$

Ce problème se simplifie considérablement si on note que $\hat{h}(\boldsymbol{q}, \theta)$ dépend linéairement de $\boldsymbol{q}$. En développant (1.14), on constate en effet que

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 J_x(\theta) + \sin\phi_1 J_y(\theta) \\ \vdots \\ \cos\phi_p J_x(\theta) + \sin\phi_p J_y(\theta) \end{pmatrix} \boldsymbol{q} = J_\theta \boldsymbol{q} \tag{1.15}$$

où, en notant $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$, $J_x(\theta)$ et $J_y(\theta)$ sont les deux matrices :

$$J_x(\theta) = \begin{pmatrix} c^3 & -2c^2 s & 2cs^2 & cs^2 \\ c^2 s & c(c^2 - s^2) & -s(c^2 - s^2) & -c^2 s \\ c^2 s & -2cs^2 & -2c^2 s & s^3 \\ cs^2 & s(c^2 - s^2) & c(c^2 - s^2) & -cs^2 \end{pmatrix} \ ,$$

$$J_y(\theta) = \begin{pmatrix} c^2 s & c(c^2 - s^2) & -s(c^2 - s^2) & -c^2 s \\ cs^2 & 2c^2 s & -2cs^2 & c^3 \\ cs^2 & s(c^2 - s^2) & c(c^2 - s^2) & -cs^2 \\ s^3 & 2cs^2 & 2c^2 s & c^2 s \end{pmatrix} \ .$$

Pour toute estimation $\hat{\theta}$ de θ, l'estimateur optimal de $\boldsymbol{q}$ s'obtient en minimisant

$$\| J_{\hat{\theta}} \ \boldsymbol{q} - h \|^2 \ .$$

La solution de ce problème de minimisation quadratique a une forme analytique :

$$\hat{\boldsymbol{q}} = (J_{\hat{\theta}}^T J_{\hat{\theta}})^{-1} J_{\hat{\theta}}^T h \ .$$

Il suffit donc de chercher l'angle du dévers θ qui minimise

$$\left\| J_{\hat{\theta}} (J_{\hat{\theta}}^T J_{\hat{\theta}})^{-1} J_{\hat{\theta}}^T h - h \right\|^2 \ .$$

On s'est ainsi ramené à une minimisation linéaire sur un seul paramètre θ au lieu des cinq paramètres $(q_1, q_2, q_3, q_4, \theta)$ initiaux.

Retrouver la normale à partir de la pente et du dévers

Une fois que le dévers $\boldsymbol{t}$ et la pente σ ont été estimés à partir du gradient de texture, on peut calculer la normale à la surface grâce à la relation (Gårding [32]) :

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{u}\cos\sigma - \boldsymbol{t}\sin\sigma \ . \tag{1.16}$$

Retrouver les coordonnées de la surface à partir de la normale

Il ne reste plus qu'à intégrer la normale pour retrouver les coordonnées cartésiennes $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ de la surface.
La normale $\boldsymbol{N}$ a pour coordonnées cartésiennes

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, 1\right)$$

On désigne par $(n_1, n_2, 1)$ les coordonnées de la normale qui ont été estimées à partir du gradient de texture, et renormalisées de sorte que la troisième coordonnée soit égale à 1. Alors $f(x_1, x_2)$ peut être estimée à son tour comme étant la solution du système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \partial f/\partial x_1 = & n_1 \\ \partial f/\partial x_2 = & n_2 \end{array} \right. \tag{1.17}$$

La surface Σ est supposée régulière, donc la condition de Schwartz sur les dérivées partielles de f d'ordre deux doit être satisfaite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \ .$$

Il faut donc imposer que

$$\frac{\partial n_2}{\partial x_1} = \frac{\partial n_1}{\partial x_2}$$

lors de la résolution de (1.17).

Chapitre 2

Stationnarisation

Dans ce chapitre nous étudions les processus localement dilatés de la forme

$$F(x) = DR(x) = R(d(x)) \ , \tag{2.1}$$

où R est un processus stationnaire sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$), et où d est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$). Nous avons montré au paragraphe 1.3.3 que les processus stationnaires sur des courbes, ou sur des surfaces développables, peuvent s'écrire sous cette forme, et nous verrons au Chapitre 3 comment traiter le cas des processus définis sur des surfaces courbes.

On peut peut voir les processus localement dilatés comme des processus déformés dont on veut estimer la déformation. Les modèles de déformation sont employés en traitement d'images dans le but de trouver la correspondance entre des images qui sont les déformations d'un même modèle (Amit [3], Amit, Grenander et Piccioni [4]), avec de nombreuses applications en imagerie médicale (McInerney et Terzopoulos [52]). Ce type de problèmes, qui entre dans le cadre de l'analyse fonctionnelle de données (Ramsay et Silverman [60], Wang et Gasser [69]) peut être modélisé par la recherche d'une fonction déterministe R telle que chacune des réalisations observées soit de la forme

$$F(x) = DR(x) \ ,$$

où D est une déformation stochastique (par exemple le tremblé de la main qui trace une signature, ou bien un “jitter”).

Notre cadre est légèrement différent puisqu'il suppose que R est un processus stochastique, et qu'on se propose d'estimer la déformation D à partir d'une seule réalisation de F. Nous avons cependant à notre disposition une information importante : F est la déformation d'un processus R *stationnaire*. La stationnarité, qui équivaut à une invariance par translation, constitue le critère d'invariance, commun aux modèles de déformation.

L'idée de la stationnarisation d'un processus non stationnaire est apparu en géostatistique où les données à analyser, par exemple des mesures pluviométriques sont fortement non stationnaires en espace (Sampson et Guttorp [62], Perrin [58]). Sampson et Guttorp proposent de supposer que le phénomène observé est la réalisation d'un champ aléatoire isotrope et stationnaire, qui a subi une déformation. Mesurer la déformation permet alors de se ramener à un champ stationnaire, qui est plus simple à analyser d'un point de vue statistique.

En renversant la perspective, on peut dire que la dilatation locale est l'opérateur D (défini à une transformation affine près) tel que $D^{-1}F$ soit stationnaire. Nous introduisons dans la Définition 2.1 une version locale de cette propriété : on dit que le processus $D_v^{-1}DR$ est stationnarisé au voisinage de v si $D_v^{-1}D$ laisse l'opérateur de translation par v localement invariant. Le Théorème 2.2 montre que le processus $D_v^{-1}DR$ satisfait alors à un critère d'invariance local. Cette étude locale peut être menée sur tout processus déformé de la forme DR sur $\mathbb{R}^n$, sans supposer que D est un opérateur de dilatation locale.

Nous exploitons ce résultat de stationnarisation dans le cas d'une dilatation locale en une et en deux dimensions. La dilatation locale peut être vue comme un changement de métrique de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, qui s'approche localement par une transformation affine. Les transformations affines forment un groupe T_β, où β représente la position et l'échelle : (u, s) en une dimension, et $(\boldsymbol{u}, S)$ en deux dimensions, où S est une matrice inversible. L'application de ce groupe à une fonction ψ de $\boldsymbol{C}^1$ à support compact génère les fonctions d'ondelettes $(\psi_{u,s})$ en une dimension, et une nouvelle famille de fonctions $(\psi_{\boldsymbol{u},S})$ appelées warplets en deux dimensions.

Le Théorème 2.3 (resp. 2.6) exhibe une déformation D_v en une (resp. deux) dimensions, au sein des transformations affines, qui permet de stationnariser le processus DR. Le critère d'invariance local qui en résulte s'écrit alors comme une équation de conservation sur la variance des coefficients d'ondelettes ou de warplets du processus stationnarisé.

Grâce à la propriété de groupe des opérateurs T_β, les ondelettes et les warplets migrent par transformation affine. Ceci transforme l'équation de conservation relative au processus stationnarisé en une équation de transport sur les coefficients d'ondelettes ou de warplets du processus localement dilaté. La vitesse apparaissant dans cette équation de transport est tout simplement le gradient de la déformation tangente.

N'ayant qu'une réalisation du processus à notre disposition, nous ne travaillons que sur les moments d'ordre deux du processus. Nous étudions en particulier la diagonale de l'opérateur de covariance de F dans une base d'ondelettes

$$\langle K_F \psi_{u,s}, \psi_{u,s} \rangle \ ,$$

ce qui est dans le même esprit que la fonction de corrélation localisée de Perrin, Torrésani et Fuchs [57].

Plan du chapitre La section 2.1 rappelle quelques propriétés relatives à l'opérateur de covariance. Avant d'aller plus loin dans l'étude des processus localement dilatés, nous posons dans la section 2.2 le problème de l'unicité de leur représentation : la définition des processus localement dilatés ci-dessus (2.1) permet-elle de caractériser $d(x)$ de manière unique ? Dans la section 2.3, nous stationnarisons le processus localement dilaté F et nous en déduisons une équation de conservation. Les sections 2.4 et 2.5 tirent les conséquences de la stationnarisation des processus localement dilatés mono- et bidimensionnels, respectivement.

2.1 Rappels sur l'opérateur de covariance

Par définition de la stationnarité au sens large, la covariance de R,

$$r(x, y) = E\{R(x)R(y)\} \tag{2.2}$$

est une fonction de $x - y$, qui est notée c par la suite :

$$c(\delta) = E\{R(x)R(x + \delta)\} \ . \tag{2.3}$$

Dans la suite on désignera par "stationnaires" les processus stationnaires au sens large.
Le processus localement dilaté F n'est pas stationnaire, et sa covariance a pour expression :

$$\begin{aligned} E\{F(x)F(x + \delta)\} =& E\{R(d(x))R(d(x + \delta))\} \\ =& c(d(x + \delta) - d(x)) \end{aligned}$$

Notre objectif sera d'estimer la dilatation locale $d(x)$ en analysant la covariance de F.
L'opérateur de covariance associé au processus R est l'opérateur intégral K_R de $L^2(\mathbb{R})$ qui a pour noyau la covariance de R :

$$K_R f(x) = \int r(x,y) f^*(y) dy \ . \tag{2.4}$$

Lorsque R est stationnaire, K_R est un opérateur de convolution :

$$K_R f(x) = \int c(x-y) f^*(y) dy \ .$$

On désigne par $\langle f, g\rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.
L'opérateur de covariance définit une forme bilinéaire définie positive $\langle K_R\ f, g\rangle$.
En particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwartz est vérifiée :

$$|\langle K_R\ f, g\rangle|^2 \leq \langle K_R\ f, f\rangle \langle K_R\ g, g\rangle \ . \tag{2.5}$$

Nous terminons ce paragraphe de rappels en énonçant trois propositions élémentaires :

Proposition 2.1. *Si f et g sont deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et si K_R est l'opérateur de covariance du processus R, alors*

$$\langle K_R\ f, g\rangle = E\left\{\langle R, f\rangle \langle R, g\rangle^*\right\}$$

Preuve

$$\begin{aligned}\langle K_R f, g\rangle &= \iint r(x,y) f^*(y) g(x) dx dy \\ &= E\left\{\iint R(x)R(y) f^*(y) g(x) dx dy\right\} \\ &= E\left\{\int R(y) f^*(y) dy \left(\int R(x) g^*(x) dx\right)^*\right\} \ .\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2. *Si D est un opérateur linéaire et $F = DR$, alors les opérateurs de covariance de F et de R sont reliés par*

$$K_F = D K_R D^* \ ,$$

où D^* désigne l'adjoint de D dans $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve Pour tout f et g de $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\langle K_F f, g\rangle =& E\left\{\langle F, f\rangle\langle F, g\rangle^*\right\} = E\left\{\langle DR, f\rangle\langle DR, g\rangle^*\right\}\\ =& E\left\{\langle R, D^* f\rangle\langle R, D^* g\rangle^*\right\} = \langle K_R D^* f, D^* g\rangle\\ =& \langle (DK_R D^*) f, g\rangle \ .\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3. *Si le processus R est stationnaire, alors son opérateur de covariance K_R vérifie pour tout f de $H^1(\mathbb{R})$:*

$$\langle K_R f, f'\rangle = 0 \ .$$

Preuve Par symmétrie de l'opérateur de covariance, $\langle K_R f, f'\rangle = \langle K_R f', f\rangle$. Notons $E\{R(x)R(y)\} = c(x-y)$. En faisant deux intégrations par parties, l'une par rapport à y, et l'autre par rapport à x, on voit que

$$\begin{aligned}\langle K_R f, f'\rangle &= \iint c(x-y) f(x) f'(y)^* dx dy\\ &= \iint c'(x-y) f(x) f(y)^* dx dy\\ &= -\iint c(x-y) f'(x) f(y)^* dx dy\\ &= -\langle K_R f', f\rangle \ .\end{aligned}$$

Donc $\langle K_R f, f'\rangle = 0$.
□

2.2 Unicité de la représentation

Nous avons vu dans l'introduction que si le processus localement dilaté a une fonction d'amplitude $a(x)$:

$$F(x) = a(x) R(d(x)) \ ,$$

alors la variance de $F(x)$ définit $a(x)$ à une constante multiplicative près. Notre but étant d'estimer la dilatation locale $d(x)$ à partir d'un processus localement dilaté, on peut se demander dans quelle mesure cette fonction est définie de manière unique, étant donné un processus localement dilaté. La réponse est apportée par le Théorème 2.1 ci-dessous, qui est l'analogue d'un résultat de Perrin [58] : sous une hypothèse assez faible sur la covariance du processus stationnaire R, la dilatation locale est unique à une transformation affine près, autrement dit il existe un processus stationnaire $\tilde{R}$ et une fonction $\tilde{d}(x)$ tels que

$$R(d(x)) = \tilde{R}(\tilde{d}(x))$$

si et seulement si d et $\tilde{d}$ sont reliés par une transformation affine :

$$\tilde{d}(x) = ad(x) + b \ .$$

L'hypothèse faite sur la covariance $c(\delta)$ du processus stationnaire R est que la dérivée c' soit définie, et strictement négative sur un intervalle $]0, \epsilon]$. Ceci est vérifié par tout processus R qui n'est pas un bruit blanc, et dont la covariance c n'est pas constante sur un voisinage $[\epsilon, \epsilon]$ autour de 0.

Théorème 2.1 (Unicité). *Soit $F(x) = R(d(x))$ un processus localement dilaté. Si la covariance c du processus stationnaire R a une dérivée première définie, et strictement négative sur un intervalle $]0, \epsilon]$, alors la dilatation locale $d(x)$ est unique à une transformation affine près.*

Preuve Rebaptisons $d_1 = d$ et $R_1 = R$. Supposons qu'il existe une fonction strictement croissante d_2, et un processus stationnaire R_2, tels que les statistiques de $R_1(d_1(x))$ et de $R_2(d_2(x))$ soient les mêmes jusqu'au second ordre. Les covariances de R_1 et R_2 sont notées respectivement c_1 et c_2. Nous montrerons plus loin que la non-annulation de c_1' sur $]0, \epsilon]$ s'étend à c_2'.
Comme les covariances des processus $R_1(d_1(x))$ et $R_2(d_2(x))$ sont égales, pour tout x et y,

$$c_1(d_1(x) - d_1(y)) = c_2(d_2(x) - d_2(y)) \ . \tag{2.6}$$

Notre but est de montrer qu'il existe une constante K telle que

$$d_1'(x) = K \ d_2'(x) \ . \tag{2.7}$$

Les fonctions de covariance c_1 et c_2 sont supposées différentiables partout sauf en 0. Pour $x \neq y$, nous pouvons dériver (2.6) par rapport à x :

$$d_1'(x)c_1'(d_1(x) - d_1(y)) = d_2'(x)c_2'(d_2(x) - d_2(y)) \ . \tag{2.8}$$

Revenons un instant sur l'hypothèse de non-annulation de la dérivée de la covariance c_1' sur $]0, \epsilon]$. Grâce à la relation ci-dessus, nous pouvons voir que

c_2' également ne s'annule pas sur un intervalle $]0, \epsilon']$.
L'équation (2.8) montre que tant que $c_1'(d_1(x) - d_1(y)) \neq 0$,

$$\frac{d_1'(x)}{d_2'(x)} = \frac{c_2'(d_2(x) - d_2(y))}{c_1'(d_1(x) - d_1(y))} . \tag{2.9}$$

Puisque c_1 et c_2 sont des fonctions paires, c_1' et c_2' sont impaires, donc si l'on échange x et y dans (2.9),

$$\frac{d_1'(y)}{d_2'(y)} = \frac{c_2'(d_2(y) - d_2(x))}{c_1'(d_1(y) - d_1(x))} = \frac{c_2'(d_2(x) - d_2(y))}{c_1'(d_1(x) - d_1(y))} = \frac{d_1'(x)}{d_2'(x)} .$$

On a donc montré que $d_1'(y)/d_2'(y) = d_1'(x)/d_2'(x)$ pour tout x et y tels que $c_1'(d_1(x) - d_1(y))$ ne s'annule pas. Montrons maintenant que cette identité s'étend à *tout* x et y. Par hypothèse, c_1' ne s'annule pas sur $]0, \varepsilon]$. Nous faisons une division euclidienne de $d_1(x) - d_1(y)$ par ε : il existe un unique entier naturel M, et un unique ε' tels que $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$, et

$$d_1(x) - d_1(y) = M\ \varepsilon + \varepsilon' .$$

Comme la dilatation locale d_1 est continue et strictement croissante, elle est inversible. Il existe donc une suite u_n telle que

$$\begin{aligned} u_0 &= x\ , \\ \forall\ 1 \leq n \leq M,\ d_1(u_n) - d_1(u_{n-1}) &= \varepsilon\ , \\ u_{M+1} &= y\ . \end{aligned}$$

Comme c_1' ne s'annule pas sur $]0, \epsilon]$, la suite u_n vérifie

$$\forall\ 1 \leq n \leq M,\ c_1'(d_1(u_n) - d_1(u_{n-1})) \neq 0\ ,$$

donc

$$\forall\ 1 \leq n \leq M+1,\ d_1'(u_n)/d_2'(u_n) = d_1'(u_{n-1})/d_2'(u_{n-1})\ ,$$

et par transitivité $d_1'(x)/d_2'(x) = d_1'(y)/d_2'(y)$. On a donc montré (2.7).
□

Remarque 2.1. *Comme exemple de processus ne satisfaisant pas cette hypothèse, on peut citer le bruit blanc. En effet, la covariance d'un bruit blanc est un Dirac centré en zéro, donc on ne peut pas trouver d'intervalle* $]0, \epsilon[$

où sa dérivée ne s'annule pas. Un bruit blanc localement dilaté reste un bruit blanc, donc il est impossible d'en estimer la dilatation locale. On fait quotidiennement l'expérience auditive de ce phénomène : alors qu'on entend l'effet Doppler sur une sirène ou un sifflet, on ne le remarque pas du tout sur le bruit d'un moteur de voiture, qui est proche du bruit blanc.

Remarque 2.2. *On peut étendre ce Théorème d'unicité à un processus $R(\boldsymbol{x})$ défini sur $\mathbb{R}^n$, et à valeur dans $\mathbb{R}$. L'hypothèse nécessaire sur la covariance $c(\boldsymbol{\delta})$ est qu'elle soit différentiable, et que son gradient ne s'annule pas sur une boule pointée, centrée en 0 : $B(0,\epsilon)\backslash\{0\}$.*

2.3 Stationnarisation

Alors que beaucoup d'auteurs ont cherché à approcher un processus non stationnaire par un processus stationnaire tangent, nous adoptons ici un point de vue différent : sachant que le processus localement dilaté $F = DR$ est produit par déformation d'un processus stationnaire R, nous allons chercher à stationnariser F en lui appliquant un opérateur D_v^{-1} qui est tangent à D^{-1} sur l'ensemble des fonctions localisées autour de v.

Cette notion de stationnarisation peut être introduite en toute généralité, i.e. indépendamment du fait que la déformation D est une dilatation locale, et pour des processus définis dans $\mathbb{R}^n$. Nous commençons par exprimer la stationnarité en termes de translations, puis dans le paragraphe 2.3.2, nous introduisons deux espaces de fonctions localisées qui nous permettront de définir la notion de tangence entre les opérateurs D_v^{-1} et D^{-1}.

2.3.1 Invariance par translation

Nous nous plaçons en dimension n quelconque. La propriété de stationnarité étant une propriété d'invariance par translation, nous introduisons un opérateur de translation $T_{\boldsymbol{v}}$, tel que pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$

$$T_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) \ .$$

L'opérateur de translation permet une caractérisation des processus stationnaires (sous-entendu au sens large) à partir de leur opérateur de covariance :

Proposition 2.4. *Un processus centré R dont la covariance est continue est stationnaire si et seulement si pour toute fonction f de $H^1(\mathbb{R}^n)$,*

$$\nabla_v \langle T_v^* K_R T_v f, f\rangle = 0 \ . \tag{2.10}$$

Preuve Puisque $T_v f(x) = f(x-v)$,

$$\begin{aligned}\langle T_v^* K_R T_v f, f\rangle &= \iint r(x,y) f(x-v)\ f(y-v)^*\ dx\ dy \\ &= \iint r(x+v, y+v) f(x)\ f(y)^*\ dx\ dy\end{aligned}$$

Si R est stationnaire, $r(x,y) = c(x-y)$; il est donc clair que $\langle T_v^* K_R T_v f, f\rangle$ est indépendant de v, d'où (2.10).
Réciproquement, supposons que (2.10) soit vérifiée, et notons

$$r(x,y) = c(x, x-y)\ .$$

Le processus centré R est stationnaire si et seulement si c est indépendante de sa première variable, ce que nous allons vérifier. Par hypothèse, pour toute fonction f de $H^1(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante $C(f)$ telle que pour tout v :

$$\iint c(x+v, x-y) f(x) f(y)^*\ dx\ dy = C(f)\ .$$

Etant donnée une suite f_m de fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers la mesure de Dirac en 0, notée δ_0, on a pour tout v :

$$\iint c(x+v, x-y) f_m(x) f_m(y)^*\ dx\ dy = C(f_m)\ ,$$

et puisque la fonction c est continue par rapport à ses deux variables,

$$\lim_{m\to\infty} C(f_m) = c(v,0)\ .$$

Le membre de gauche étant indépendant de v, ceci prouve que $c(v,0)$ est indépendant de v.
Fixons maintenant $z \in \mathbb{R}^n$ et soit g_m une suite de fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers $\delta_0 + \delta_z$: par hypothèse (2.10),

$$\iint c(x+v, x-y) g_m(x) g_m(y)^*\ dx\ dy = C(g_m)\ .$$

A la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{m\to\infty} C(g_m) = c(v,0) + c(z+v,0) + c(z+v,z) + c(v,-z)\ .$$

Or $c(z+v,z) = c(v,-z)$, donc pour tout v :

$$\lim_{m\to\infty} C(g_m) = c(v,0) + c(z+v,0) + 2c(v,-z)\ .$$

Comme le membre de gauche de l'expression ci-dessus est indépendant de v, tout comme $c(v,0)$ et $c(z+v,0)$, on obtient que $c(v,z)$ est également indépendant de v, ce qui prouve que R est stationnaire.
□

Il s'agit maintenant d'utiliser la notion d'invariance par translation pour approcher localement l'opérateur de déformation inverse D^{-1}. Ceci nécessite l'introduction d'espaces de fonctions localisées.

2.3.2 Espaces de fonctions localisées

Nous introduisons deux espaces de fonctions à support compact qui vont permettre de faire une analyse locale. Si $B(v,s)$ désigne la boule fermée de centre v et de rayon s, les espaces $L_{v,s}$ et $H_{v,s}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} L_{v,s} &= \{f \mid f \in L^\infty(\mathbb{R}^n), Supp(f) \subset B(v,s)\} && (2.11)\\ H_{v,s} &= \{f \mid f \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \nabla f \in L^\infty(\mathbb{R}^n), Supp(f) \subset B(v,s)\} && (2.12)\end{aligned}$$

Les normes associées à ces deux espaces sont respectivement :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{v,s}} &= \|f\|_\infty \\ \|f\|_{H_{v,s}} &= \|f\|_\infty + s\|\nabla f\|_\infty \end{aligned} \tag{2.13}$$

On définit enfin la norme d'un opérateur K restreint à $L_{v,s}$ par

$$\|K\|^2_{L_{v,s}} = \sup_{f\in L_{v,s}} \frac{\langle Kf, f\rangle}{\|f\|_2^2}\ . \tag{2.14}$$

Remarque 2.3. *L'espace $L_{v,s}$ est un sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $H_{v,s}$ est un sous-espace de $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 2.4. *Il est clair que $f \in L_{0,s}$ si et seulement si sa translatée par v, $T_v f$ est un élément de $L_{v,s}$. De plus,*

$$\|f\|_{L_{0,s}} = \|T_v f\|_{L_{v,s}}.$$

Le même raisonnement s'applique aux espaces $H_{v,s}$.

Remarque 2.5. *La normalisation de $\|\nabla f\|_\infty$ par un facteur s dans la définition (2.13) de la norme $\|\nabla f\|_\infty$ peut paraître surprenante, mais elle est naturelle si on considère une fonction $f_s(x) = \frac{1}{s^n} f(x/s)$ comprimée par s,* *avec* $f \in H_{0,1}$ *: on a alors* $f_s \in H_{0,s}$*, et les normes de* f_s *et de* f *sont comparables, au sens où*

$$\|f_s\|_{H_{0,s}} = \frac{1}{s^n}\|f\|_{H_{0,1}} \ .$$

On n'aurait pas cette relation de proportionnalité si la norme $\|\nabla f\|_\infty$ *était définie sans le facteur* s*.*

2.3.3 Processus stationnarisé

On cherche un opérateur D_v tel que l'inverse de D_v approche l'inverse de D, de sorte que si on applique D_v^{-1} à DR, on obtienne un processus qui soit proche de R au voisinage de v. Pour que le processus $D_v^{-1}DR$ soit stationnarisé, il faut préciser en quel sens $D_v^{-1}D$ approche l'identité. La stationnarité d'un processus signifie une invariance vis-à-vis des translations. La propriété de stationnarisation que nous recherchons est locale, au voisinage de v. Nous allons donc imposer qu'au premier ordre, l'opérateur

$$\left(D_v^{-1}D\right)^*$$

laisse invariantes les translations par T_v. L'opérateur D_v^{-1} est alors dit *tangent* à l'opérateur D^{-1} en v. L'espace de fonctions sur lequel porte la condition de tangence est l'espace de fonctions $H_{0,s}$ à support compact dans la boule $B(0,s)$, avec s tendant vers 0.

Définition 2.1 (Processus stationnarisé). *Etant donné un processus déformé* $F(x) = DR(x)$*, on appelle* processus stationnarisé *en* v *le processus*

$$F_v = D_v^{-1}F \ ,$$

transformé par un opérateur D_v^{-1} *qui est tangent à* D^{-1} *en* v*, au sens où pour toute fonction* f *de* $H_{0,s}$ *:*

$$\left\|(D_v^{-1}D)^*T_vf - T_vf\right\|_\infty = \mathcal{O}(s)\|f\|_{H_{0,s}} \qquad (2.15)$$

$$\left\|(\nabla_v + \nabla_{\boldsymbol{x}})\,(D_v^{-1}D)^*T_vf\right\|_\infty = \mathcal{O}(s)\|f\|_{H_{0,s}} \qquad (2.16)$$

Remarque 2.6. *Cette définition assure en particulier que* R *est un processus stationnarisé à partir de* DR*. Pour voir ceci, il suffit de constater que l'opérateur* D^{-1} *est tangent à lui-même : si* $(D_v^{-1}D)^*$ *est l'identité, la condition (2.15) est trivialement vérifiée, et la condition (2.16) l'est également, car*

$$\nabla_v\left(f(x-v)\right) = -\nabla_{\boldsymbol{x}}\left(f(x-v)\right) \ .$$

Un processus stationnarisé $F_v = D_v^{-1}F$ n'est pas forcément stationnaire, mais nous allons voir dans le Théorème ci-dessous qu'il jouit d'une certaine propriété qui est proche de la stationnarité. Alors que le processus R, qui est stationnaire, vérifie pour toute fonction $\psi_s(x) = \frac{1}{s^n}\psi(x/s)$ où $\psi \in H_{0,1}$:

$$\nabla_v \langle K_R T_v \psi_s, T_v \psi_s \rangle = 0 \ ,$$

les conditions (2.15-2.16) de tangence entre D_v^{-1} et D^{-1} permettent de contrôler

$$\nabla_v \langle K_{F_v} T_v \psi_s, T_v \psi_s \rangle$$

lorsque s tend vers 0.

Théorème 2.2 (Equation de conservation). *Si $F_v = D_v^{-1}DR$, est un processus stationnarisé de $\mathbb{R}^n$, et si $\psi \in H_{0,1}$, alors si $\psi_s(x) = \frac{1}{s^n}\psi(x/s)$, on a lorsque $s \to 0$*

$$\nabla_v \langle K_{F_v} T_v \psi_s, T_v \psi_s \rangle = \mathcal{O}(s) \frac{1}{s^n} \|K_R\|^2_{L_{0,s}} \ . \tag{2.17}$$

Preuve du Théorème 2.2 Par définition du processus stationnarisé $F_v = D_v^{-1}F$ (Définition 2.1), l'opérateur $D_v^{-1}D$, que nous notons ici I_v, satisfait , pour toute fonction $\psi_{v,s} = T_v \psi_s$ de $H_{v,s}$,

$$\begin{aligned} \|I_v^* \psi_{v,s} - \psi_{v,s}\|_\infty &\leq \mathcal{O}(s) \|\psi_s\|_{H_{0,s}} & (2.18) \\ \|\nabla_v I_v^* \psi_{v,s} + \nabla_{\boldsymbol{x}} I_v^* \psi_{v,s}\|_\infty &\leq \mathcal{O}(s) \|\psi_s\|_{H_{0,s}} & (2.19) \end{aligned}$$

Puisque $F_v = I_v R$, d'après la Proposition 2.2,

$$\begin{aligned} \langle K_{F_v} \psi_{v,s}, \psi_{v,s} \rangle &= \langle I_v K_R \ I_v^* \psi_{v,s}, \psi_{v,s} \rangle \\ &= \langle K_R \ I_v^* \psi_{v,s}, I_v^* \psi_{v,s} \rangle \ . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Donc par symétrie de l'opérateur K_R,

$$\nabla_v \langle K_{F_v} \psi_{v,s}, \psi_{v,s} \rangle = 2 \langle K_R \ I_v^* \psi_{v,s}, \nabla_v \left[I_v^* \psi_{v,s} \right] \rangle \ . \tag{2.21}$$

Par (2.19), il existe une fonction f de $L_{v,s}$ telle que $\|f\|_\infty = \|\psi_s\|_{H_{0,s}}$, et

$$\nabla_v I_v^* \psi_{v,s} \quad = \quad -\nabla_{\boldsymbol{x}} I_v^* \psi_{v,s} + \mathcal{O}(s) f \tag{2.22}$$

De même, par (2.18), il existe une fonction g de $L_{v,s}$ telle que $\|g\|_\infty = \|\psi_s\|_{H_{0,s}}$, et

$$I_v^*\psi_{v,s} \quad = \quad \psi_{v,s} + \mathcal{O}(s)g \tag{2.23}$$

En remplaçant (2.22) et (2.23) dans (2.21), lorsque $s \to 0$, on obtient

$$\nabla_v \langle K_{F_v}\psi_{v,s}, \psi_{v,s}\rangle = -2\langle K_R\ I_v^*\psi_{v,s}, \nabla_{\boldsymbol{x}}\,(I_v^*\psi_{v,s})\,\rangle + \mathcal{O}(s)\langle K_R\psi_{v,s}, f\rangle + \mathcal{O}(s^2)\langle K_R g, f\rangle\ .$$

La stationnarité de R implique, par la Proposition 2.4, que

$$\langle K_R I_v^*\psi_{v,s}, \nabla_{\boldsymbol{x}}\,(I_v^*\psi_{v,s})\,\rangle = 0\ .$$

D'autre part, on peut majorer $\langle K_R\ \psi_{v,s}, f\rangle$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, par

$$\sup_{\substack{f\in L_{v,s}\\ \|f\|_\infty = \|\psi_{vs}\|_{H_{v,s}}}} \langle K_R\ f, f\rangle\ .$$

On a donc au premier ordre lorsque $s \to 0$:

$$\nabla_v \langle K_{F_v}\psi_{v,s}, \psi_{v,s}\rangle \leq \mathcal{O}(s) \sup_{\substack{f\in L_{v,s}\\ \|f\|_\infty = \|\psi_{vs}\|_{H_{v,s}}}} \langle K_R\ f, f\rangle\ .$$

Mais

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{f\in L_{v,s}\\ \|f\|_\infty = \|\psi_{vs}\|_{H^1_{v,s}}}} \langle K_R\ f, f\rangle &= \|f\|_\infty^2 \sup_{\substack{f\in L_{v,s}\\ \|f\|_\infty = \|\psi_s\|_{H_{0,s}}}} \frac{\langle K_R\ f, f\rangle}{\|f\|_\infty^2} \\
&\leq s^n \|\psi_s\|_{H_{0,s}}^2 \sup_{\substack{f\in L_{v,s}\\ \|f\|_\infty = \|\psi_s\|_{H_{0,s}}}} \frac{\langle K_R\ f, f\rangle}{\|f\|_2^2} \\
&\leq s^n \|\psi_{v,s}\|_{H_{v,s}}^2 \times \|K_R\|_{L_{v,s}}^2
\end{aligned}$$

Et puisque $\psi_s(x) = \frac{1}{s^n}\psi(x/s)$, on a (voir Remarque 2.5)

$$\|\psi_s\|_{H_{0,s}} = \tfrac{1}{s^n}\|\psi\|_{H_{0,1}}\ .$$

Donc

$$\sup_{\substack{f\in L_{v,s}\\ \|f\|_\infty = \|\psi_{vs}\|_{H^1_{v,s}}}} \langle K_R\ f, f\rangle \quad \leq \quad \frac{1}{s^n}\|\psi\|_{H_{0,1}}^2 \|K_R\|_{L_{v,s}}^2$$

□

Remarque 2.7. *De l'équation de conservation pour le processus stationnarisé* F_v

$$\nabla_v \langle K_{F_v} T_v \psi_s, T_v \psi_s \rangle = \mathcal{O}(s) \times \frac{1}{s^n} \|K_R\|^2_{L_{0,s}} \ ,$$

on va pouvoir déduire une équation pour le processus F*. En effet, comme* $F_v = D_v^{-1}\ F$*, on a directement*

$$\nabla_v \langle K_F (D_v^{-1})^* T_v \psi_s, (D_v^{-1})^* T_v \psi_s \rangle = \mathcal{O}(s) \times \frac{1}{s^n} \|K_R\|^2_{L_{0,s}} \ . \tag{2.24}$$

Si l'on choisit l'opérateur D_v *de telle sorte que* $(D_v^{-1})^* T_v$ *puisse s'écrire sous la forme d'un opérateur* $T_{\beta(v)}$*, paramétré par* $\beta(v) = (\beta_i(v))_i$*, alors,*

$$\begin{aligned} \nabla_v \langle K_F (D_v^{-1})^* T_v \psi_s, (D_v^{-1})^* T_v \psi_s \rangle &= \nabla_v \langle K_F T_{\beta(v)} \psi_s, T_{\beta(v)} \psi_s \rangle \\ &= \sum_i \nabla_v \beta_i(v) \nabla_{\beta_i} \langle K_F T_{\beta(v)} \psi_s, T_{\beta(v)} \psi_s \rangle \ . \end{aligned}$$

Il convient de s'assurer que le second membre de (2.24), $\mathcal{O}(s) \times \frac{1}{s^n} \|K_R\|^2_{L_{0,s}}$*, est d'un ordre plus petit que l'un des gradients* $\nabla_{\beta_i} \langle K_F T_{\beta(v)} \psi_s, T_{\beta(v)} \psi_s \rangle$ *lorsque* $s \to 0$*. On aboutit alors à une équation de transport :*

$$\sum_i \nabla_v \beta_i(v) \left(\nabla_{\beta_i} \langle K_F T_{\beta(v)} \psi_s, T_{\beta(v)} \psi_s \rangle + \mathcal{O}(s) \right) = 0 \ .$$

Cette technique sera mise en œuvre en une et en deux dimensions dans les prochaines sections, et on verra que les gradients $\nabla_v \beta_i(v)$ *contiennent toute l'information nécessaire sur la dilatation locale.*

Remarque 2.8. *L'analyse locale des processus non stationnaires utilise souvent la notion de processus stationnaire tangent (Priestley [59], Keich [41]). L'approche que nous avons introduite pourrait être comparée à celle de Zurbenko [74] : afin d'étudier un processus non stationnaire* $F(x)$*, Zurbenko introduit des processus stationnaires* R_u *tels que* $R_u(u) = F(u)$*, et* R_u *est dit tangent à* F*.*

Nous pourrions également introduire un processus stationnaire tangent, le processus stationnaire $D_{d(u)} R$*, qui coïncide avec* F *au point* u *:*

$$D_{d(u)} R(u) = R(d(u)) = F(u) \ .$$

Nous adoptons le point de vue symétrique : le processus non stationnaire $F(x)$ *que nous étudions provient de la déformation d'un processus stationnaire* R*. Nous construisons des processus non stationnaires* F_v *tels que* $F_v(v) = R(v)$*, et tels que la variation de* F_v *en* v *imite celle de* R*.*

2.4 En une dimension

Les notions introduites dans la section précédente vont maintenant être exploitées, en une dimension ($n = 1$), puis dans la section 2.5 en deux dimensions ($n = 2$), afin d'analyser les processus localement dilatés en termes de stationnarisation.

2.4.1 Ondelettes

Pour analyser le changement de métrique entre le processus stationnaire et le processus localement dilaté, nous introduisons le groupe des transformations affines, présenté par Daubechies dans [26], et traité de façon plus approfondie par Grossmann et al. dans [35].

Si $\beta = (u, s)$, avec $u \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, on définit pour $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$T_\beta f(x) = T_{(u,s)} f(x) = \frac{1}{s} f\left(\frac{x-u}{s}\right) . \tag{2.25}$$

La loi de groupe de T_β est celle du groupe affine :

$$\beta_1\beta_2 = (u_1 + s_1 u_2,\ s_1 s_2) .$$

L'élément neutre Id correspond à $\beta = (0, 1)$, et l'inverse de T_β est $T_{\beta^{-1}}$ où

$$\beta^{-1} = (-\frac{u}{s}, \frac{1}{s}) .$$

L'adjoint de T_β est donné par

$$T_\beta^* = \frac{1}{s} T_{\beta^{-1}} .$$

L'opérateur $T_{(v,1)}$ est simplement l'opérateur T_v de translation par v, introduit dans le paragraphe 2.3.1.

Remarque 2.9. *On peut rappeler que si $f \in L_{0,1}$, on a $T_{(u,s)} f \in L_{u,s}$ et*

$$\|T_{(u,s)} f\|_{L_{u,s}} = \|T_{(0,s)} f\|_{L_{0,s}} = \frac{1}{s}\|f\|_{L_{0,1}} .$$

Le facteur s dans la norme de l'espace $H_{u,s}$ (2.12) assure que si $f \in H_{0,1}$, on a également

$$\|T_{(u,s)} f\|_{H_{u,s}} = \frac{1}{s}\|f\|_{H_{0,1}} .$$

Moments nuls : On dit qu'une fonction ψ a P *moments nuls* si son produit scalaire avec tout polynôme de degré strictement inférieur à P est nul. La transformée de Fourier de ψ est définie par

$$\hat{\psi}(\omega) = \int \psi(x) \exp(-i\omega x) \; dx$$

donc en dérivant cette formule à l'ordre p :

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{d\omega^p}\hat{\psi}(\omega) &= \frac{d^p}{d\omega^p} \int \psi(x) \exp(-i\omega x) \; dx \\ &= (-i)^p \int x^p \psi(x) \exp(-i\omega x) \; dx \; . \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre p de $\hat{\psi}$ en zéro est donc

$$\frac{d^p \hat{\psi}}{d\omega^p}(0) = (-i)^p \int x^p \psi(x) \; dx \; .$$

Ainsi, une fonction ψ a P moments nuls si et seulement si sa transformée de Fourier $\hat{\psi}$, ainsi que les dérivées de $\hat{\psi}$ jusqu'à l'ordre $P-1$, s'annulent à la fréquence zéro .

Ondelettes: Les ondelettes sont des fonctions de la forme :

$$\psi_{u,s} = T_{(u,s)}\psi \; , \tag{2.26}$$

où ψ est une fonction de $H_{0,1}$ avec au moins un moment nul, appelée ondelette mère.

Remarque 2.10. *D'après la Proposition 2.4, si R est stationnaire, $\langle K_R \psi_{u,s}, \psi_{u,s} \rangle$ est indépendant de u. Ceci peut être observé sur la Figure 2.1 : la variance des coefficients d'ondelettes d'un processus stationnaire R est représentée en bas, à gauche. On constate l'indépendance de la variance des coefficients d'ondelettes vis-à-vis de la position, qui est représentée sur l'axe des abscisses.*

Remarque 2.11. *La condition de moments nuls sur l'ondelette permet d'étendre l'étude des processus localement dilatés à une classe de processus plus large que les processus stationnaires : les processus à accroissements stationnaires. Le processus R est un processus à accroissements stationnaires si la loi de $R(x) - R(y)$ ne dépend que de $x - y$. La covariance de R a pour expression :*

$$E\{R(x)R(y)\} = \tfrac{1}{2}\left(E\{|R(x)|^2\} + E\{|R(y)|^2\} - E\{|R(x) - R(y)|^2\}\right)$$

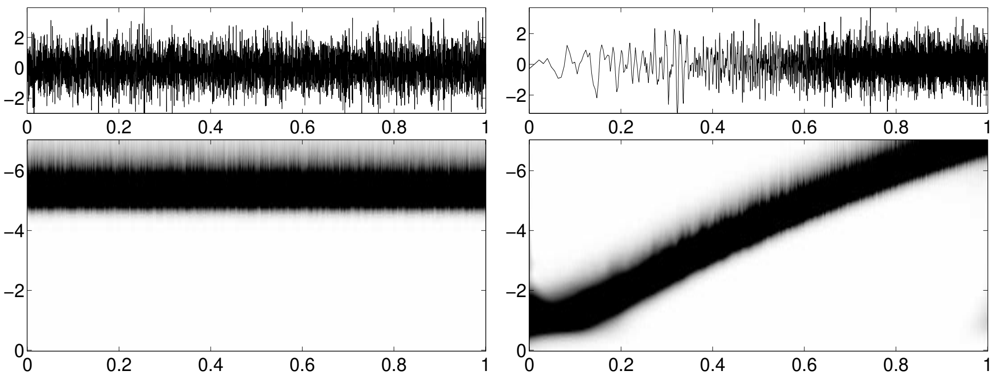


FIG. 2.1 – En haut : (a) *une réalisation d'un processus stationnaire* R *et* (b) *d'un processus localement dilaté* $F = DR$. En bas : *La variance de leurs coefficients d'ondelettes. Le noir et le blanc représentent respectivement les hautes valeurs, et zéro. La position* u *des ondelettes est sur l'axe des abscisses, et l'axe des ordonnées représente* $\log s$.

Comme l'ondelette ψ *a au moins un moment nul, les termes* $E\{|R(x)|^2\}$ *et* $E\{|R(y)|^2\}$ *disparaissent de la transformée en ondelettes de la covariance :*

$$\langle K_R \psi_{v,s}, \psi_{v,s} \rangle = -\tfrac{1}{2} \iint E\{|R(v+sx) - R(v+sy)|^2\} \psi(x)\psi(y) dx dy$$

et comme $E\{|R(v+sx) - R(v+sy)|^2\}$ *est fonction de* $(v+sx) - (v+sy)$, *l'hypothèse requise sur le processus* R *dans la section 2.3, à savoir que*

$$\frac{d}{dv} \langle K_R \psi_{v,s}, \psi_{v,s} \rangle = 0 \ , \tag{2.27}$$

est bien vérifiée. Le Théorème 2.2 s'applique donc également à des processus stationnarisés de la forme $D_v^{-1} DR$, *où* R *est à accroissements stationnaires.*

2.4.2 Stationnarisation

Nous montrons dans ce paragraphe comment la stationnarisation d'un processus localement dilaté monodimensionnel conduit à une équation de transport simple sur la variance des coefficients d'ondelettes

$$\langle K_F \psi_{u,s}, \psi_{u,s} \rangle \ .$$

Pour cela, nous nous commençons par exhiber un processus stationnarisé, qui est une simple transformation affine du processus localement dilaté.

Un processus stationnarisé

Considérons une fonction régulière f à laquelle on a appliqué l'opérateur de dilatation locale D. Pour $|x|$ petit, au voisinage d'une position u,

$$Df(u+x) = f(d(u+x)) \approx f(d(u) + d'(u)x) \ , \tag{2.28}$$

où la relation "$\approx$" a pour l'instant un sens lâche.
La relation (2.28) peut s'écrire à l'aide de la transformation affine :

$$Df \approx \frac{1}{d'(u)} T_{\beta(u)} f \ ,$$

avec $\beta(u) = (u - d(u)/d'(u), 1/d'(u))$. En notant $D_{d(u)} = \frac{1}{d'(u)} T_{\beta(u)}$, on a, pour toute fonction f localisée au voisinage de $d(u)$:

$$Df \approx D_{d(u)} f \ .$$

Cette relation est précisée dans le Théorème suivant, qui montre que l'opérateur $D^{-1}_{d(u)}$ est *tangent* à D^{-1} en $d(u)$. Ceci s'exprime par le fait que $D^{-1}_{d(u)} F$ est un processus stationnarisé en $d(u)$ au sens de la Définition 2.1.

Théorème 2.3. *Soit la déformation uniforme définie par*

$$D_{d(u)} = \frac{1}{d'(u)} T_{\beta(u)} \ , \tag{2.29}$$

où $\beta(u) = (u - d(u)/d'(u), 1/d'(u))$. *Si la fonction de dilatation locale* $d(x)$ *est dans* $C^3(\mathbb{R})$ *et a des dérivées bornées jusqu'à l'ordre trois, et si* d' *peut être minoré par une constante strictement positive, alors le processus*

$$F_{d(u)} = D^{-1}_{d(u)} F$$

est un processus stationnarisé en $d(u)$.

Preuve Nous allons montrer que les deux conditions (2.15) et (2.16) de la Définition 2.1 sont vérifiées. Montrons d'abord (2.15), pour $v = d(u)$. Soit $f_{d(u),s} = T_{(d(u),s)} f$ une fonction de $H_{d(u),s}$, et montrons que

$$\left\| (D^{-1}_{d(u)} D)^* f_{d(u),s} - f_{d(u),s} \right\|_\infty \leq \mathcal{O}(s) \|f_{0,s}\|_{H_{0,s}} \ .$$

On a

$$(D^{-1}_{d(u)} D)^* f_{d(u),s}(x) = \frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))} f_{0,s} \left(d'(u)(d^{-1}(x) - u) \right) \ .$$

Le support de $f_{0,s}$ étant inclus dans $[-s,s]$, celui de $(D_{d(u)}^{-1}D)^*f_{d(u),s}$ est donc inclus dans $[d(u-s/d'(u)), d(u+s/d'(u))]$. Si d'' est majoré, et si d' est minoré par une constante positive, un développement de Taylor au premier ordre permet de voir que :

$$\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))} = 1 + \mathcal{O}(s). \tag{2.30}$$

Un développement de Taylor au second ordre montre que

$$d^{-1}(x) = u + \frac{x-d(u)}{d'(u)} - \frac{1}{2}\frac{d''(u)}{d'(u)^3}(x-d(u))^2 + \mathcal{O}(s^3) \ ,$$

donc

$$d'(u)(d^{-1}(x)-u) = x - d(u) - \frac{1}{2}\frac{d''(u)}{d'(u)^2}(x-d(u))^2 + \mathcal{O}(s^3) \ .$$

On en déduit que

$$f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) = f_{0,s}(x-d(u)) + \mathcal{O}(s^2)\|(f_{0,s})'\|_\infty \ . \tag{2.31}$$

En rassemblant (2.30) et (2.31),

$$(D_{d(u)}^{-1}D)^*f_{d(u),s}(x) = (1+\mathcal{O}(s))\left(f_{0,s}(x-d(u)) + \mathcal{O}(s^2)\|(f_{0,s})'\|_\infty\right) \ .$$

Dans le terme $f_{0,s}(x-d(u))$ on reconnaît $f_{d(u),s}$, donc au premier ordre en s,

$$\begin{aligned}\left|(D_{d(u)}^{-1}D)^*f_{d(u),s}(x) - f_{d(u),s}(x)\right| &\leq \mathcal{O}(s)f_{0,s}(x-d(u)) + \mathcal{O}(s^2)\|(f_{0,s})'\|_\infty \\ &\leq \mathcal{O}(s)\left(\|f_{0,s}\|_\infty + s\|(f_{0,s})'\|_\infty\right)\end{aligned}$$

Mais comme $\|f_{0,s}\|_{H_{0,s}} = \|f_{0,s}\|_\infty + s\|(f_{0,s})'\|_\infty$, on a bien

$$|(D_{d(u)}^{-1}D)^*f_{d(u),s}(x) - f_{d(u),s}(x)| \leq \mathcal{O}(s)\|f_{0,s}\|_{H_{0,s}} \ ,$$

soit

$$\|(D_{d(u)}^{-1}D)^*f_{d(u),s}(x) - f_{d(u),s}\|_\infty \leq \mathcal{O}(s)\|f_{0,s}\|_{H^1_{0,s}} \ .$$

Montrons maintenant que la deuxième condition (2.16) est satisfaite. Pour cela, il faut différentier

$$(D_{d(u)}^{-1}D)^*f_{d(u),s}(x) = \frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)$$

par rapport à u et à x.
Nous comparons la dérivée par rapport à u :

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(D_{d(u)}^{-1}D)^* f_{d(u),s}(x) &= \frac{d}{du}\left(\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\right) f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) \\ &\quad + \frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\frac{d}{du}\left(f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\right) \qquad (2.32)\end{aligned}$$

et celle par rapport à x :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(D_{d(u)}^{-1}D)^* f_{d(u),s}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\right) f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) \\ &\quad + \frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\frac{d}{dx}\left(f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\right) \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Les dérivées qui apparaissent dans les premières lignes des deux expressions (2.32) et (2.33) s'écrivent respectivement

$$\frac{d}{du}\left(\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\right) = \frac{d''(u)}{d'(d^{-1}(x))}$$

et

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\right) = -\frac{d'(u)d''(d^{-1}(x)}{d'(d^{-1}(x))^3}$$

donc

$$\frac{d}{du}\left(\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\right) + d'(u)\frac{d}{dx}\left(\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\right) = \frac{d''(u)}{d'(d^{-1}(x))} - \frac{d'(u)d''(d^{-1}(x))}{d'(d^{-1}(x))^2} .$$

Il en résulte que lorsque $d^{-1}(x) - u = \mathcal{O}(s)$,

$$\left|\frac{d}{du}\left(\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\right) + d'(u)\frac{d}{dx}\left(\frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))}\right)\right| = \mathcal{O}(s) . \qquad (2.34)$$

Passons maintenant aux dérivées apparaissant dans les deuxièmes lignes des expressions (2.32) et (2.33) :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{du}\left(f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\right) = \\ &\qquad f'_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) \times \quad \frac{d}{du}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\right) = \\ &\qquad f'_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) \times \quad \frac{d}{dx}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\end{aligned}$$

Mais
$$\frac{d}{du}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) = d''(u)(d^{-1}(x)-u) - d'(u)$$
et
$$\frac{d}{dx}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) = \frac{d'(u)}{d'(d^{-1}(x))} \ .$$
Faisons un développement de Taylor de $\frac{1}{d'(d^{-1}(x))}$ au second ordre autour de la position u : il existe un $\tilde{x} \in [u, d^{-1}(x)]$ tel que

$$\frac{1}{d'(d^{-1}(x))} = \frac{1}{d'(u)} - \frac{d''(u)}{d'(u)^2}(d^{-1}(x)-u) + \frac{1}{2}\left(-\frac{d'''(\tilde{x})}{d'(d^{-1}(\tilde{x}))^3} + \frac{3d''(d^{-1}(\tilde{x}))^2}{d'(d^{-1}(\tilde{x}))^4}\right)(d^{-1}(x)-u)^2 \ . \quad (2.35)$$

Donc

$$d'(u)\frac{d}{dx}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) = d'(u) - d''(u)(d^{-1}(x)-u) + \frac{1}{2}\left(-\frac{d'''(\tilde{x})d'(u)^2}{d'(d^{-1}(\tilde{x}))^3} + \frac{3d''(d^{-1}(\tilde{x}))^2 d'(u)^2}{d'(d^{-1}(\tilde{x}))^4}\right)(d^{-1}(x)-u)^2 \ . \quad (2.36)$$

En additionnant (2.35) et (2.36), on voit que pour $d^{-1}(x)-u = \mathcal{O}(s)$,

$$\frac{d}{du}\left(f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\right) + d'(u)\frac{d}{dx}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right) = \mathcal{O}(s^2) \ .$$

Et donc

$$\left|\frac{d}{du}\left(f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\right) + d'(u)\frac{d}{dx}\left(f_{0,s}\left(d'(u)(d^{-1}(x)-u)\right)\right)\right| \leq \mathcal{O}(s^2)\|(f_{0,s})'\|_\infty \ . \quad (2.37)$$

On déduit des estimations (2.34) et (2.37) que

$$\left|\frac{d}{du}(D_{d(u)}^{-1}D)^* f_{d(u),s}(x) + d'(u)\frac{d}{dx}(D_{d(u)}^{-1}D)^* f_{d(u),s}(x)\right| \leq \mathcal{O}(s)\|f_{0,s}\|_\infty + \mathcal{O}(s^2)\|(f_{0,s})'\|_\infty \ .$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{d}{du}(D_{d(u)}^{-1}D)^* f_{d(u),s}(x) + d'(u)\frac{d}{dx}(D_{d(u)}^{-1}D)^* f_{d(u),s}(x)\right| \ \leq \ \mathcal{O}(s)\|f_{0,s}\|_{H_{0,s}} \ ,$$

ce qui montre bien (2.16).
□
Nous avons ainsi introduit un processus stationnarisé F_v à partir du processus localement dilaté F. Ce processus stationnarisé satisfait au résultat (2.17) du Théorème 2.2, que l'on réécrit ici pour $n = 1$:
si ψ est une fonction de $H_{0,1}$, et $\psi_s(x) = \frac{1}{s}\psi(x/s)$, alors si $s \to 0$,

$$\frac{d}{dv}\langle K_{F_v} T_v \psi_s, T_v \psi_s \rangle = \mathcal{O}(s)\frac{1}{s}\|K_R\|^2_{L_{0,s}} \ . \tag{2.38}$$

Les processus F_v et F ont une relation simple :

$$F_v = D_v F \ ,$$

et l'adjoint D_v^* de D_v est simplement une transformation affine T_β. Grâce à la relation de groupe à laquelle satisfont les T_β, les ondelettes migrent par transformation affine. La Proposition 2.5 ci-dessous montre qu'il y a une simple relation de migration entre les coefficients d'ondelettes de F_v et ceux de F.

2.4.3 Equation de transport

Les vecteurs propres d'un opérateur de transformation affine tel que D_v^* sont les chirps hyperboliques (Altes et Titlebaum [2]). Bien que n'étant pas vecteurs propres, les ondelettes satisfont à une propriété de migration. Il en résulte une migration entre les coefficients d'ondelettes de F et ceux de $F_{d(u)}$:

Proposition 2.5 (Migration). *Les coefficients d'ondelettes du processus $F_{d(u)}$ et ceux du processus F sont reliés par l'équation de migration :*

$$\langle F_{d(u)}, \psi_{d(u),s} \rangle = \langle F, \psi_{u,s/d'(u)} \rangle \tag{2.39}$$

Preuve Puisque $F_{d(u)} = (D_{d(u)})^{-1} F$,

$$\langle F_{d(u)}, \psi_{d(u),s} \rangle = \langle F, (D_{d(u)})^{-1^*} \psi_{d(u),s} \rangle \ .$$

Mais $(D_{d(u)})^{-1^*}\psi_{d(u),s} = T_{\beta(u)}\psi_{d(u),s}$ avec $\beta(u) = (u - d(u)/d'(u), 1/d'(u))$. Il est clair que les ondelettes migrent par dilatation uniforme par $T_{\beta(u)}$, selon la relation

$$T_{\beta(u)}\psi_{d(u),s} = \psi_{u,s/d'(u)}$$

Donc on a bien

$$\langle F_{d(u)}, \psi_{d(u),s} \rangle = \langle F, \psi_{u,s/d'(u)} \rangle \ .$$

□
Pour simplifier les expressions, on dénote dans toute la suite la variance des coefficients d'ondelettes de F par $w(u,s)$:

$$w(u,s) = \langle K_F \psi_{u,s}, \psi_{u,s} \rangle = E\left\{ |\langle F, \psi_{u,s} \rangle|^2 \right\} \ . \tag{2.40}$$

Grâce à la Proposition 2.5 de migration, nous sommes en mesure de faire le passage entre l'équation de conservation (2.38), et une équation de transport sur $w(u,s)$.

Théorème 2.4 (Transport).

$$\frac{\partial}{\partial u} w(u,s) - \frac{d''(u)}{d'(u)} \frac{\partial}{\partial \log s} w(u,s) = \mathcal{O}(s) \frac{1}{s} \|K_R\|^2_{L_{0,sd'(u)}} \ . \tag{2.41}$$

Preuve Dans le Théorème 2.2, repris dans (2.38) pour $n = 1$, nous avons montré que

$$\frac{d}{dv} \langle K_{F_v} \psi_{v,s}, \psi_{v,s} \rangle = \mathcal{O}(s) \frac{1}{s} \|K_R\|^2_{L_{0,s}} \ . \tag{2.42}$$

Grâce à la Proposition 2.5, si $v = d(u)$,

$$E\left\{ |\langle F_v, \psi_{v,s} \rangle|^2 \right\} = E\left\{ \left|\langle F, \psi_{u,s/d'(u)} \rangle\right|^2 \right\}$$

c'est-à-dire

$$\langle K_{F_v} \psi_{v,s}, \psi_{v,s} \rangle = w(u, s/d'(u)) \ .$$

Ainsi l'équation de conservation (2.42) devient

$$\frac{1}{d'(u)} \frac{d}{du} w(u, s/d'(u)) = \mathcal{O}(s) \frac{1}{s} \ \|K_R\|^2_{L_{0,s}} \ . \tag{2.43}$$

La dérivée de $w(u, s/d'(u))$ par rapport à u s'exprime en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial u}$ et $\frac{\partial w}{\partial s}$:

$$\frac{d}{du} w(u, s/d'(u)) = \frac{\partial}{\partial u} w(u, s/d'(u)) - \frac{s d''(u)}{(d'(u))^2} \frac{\partial}{\partial s} w(u, s/d'(u)) \tag{2.44}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} w(u, s/d'(u)) - \frac{d''(u)}{d'(u)} \frac{\partial}{\partial \log s} w(u, s/d'(u)) \tag{2.45}$$

En écrivant $s = s' d'(u)$, puis en remplaçant (2.45) dans (2.43), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial u} w(u,s') - \frac{d''(u)}{d'(u)} \frac{\partial}{\partial \log s} w(u,s') = \mathcal{O}(s' d'(u)) \frac{1}{s'} \|K_R\|^2_{L_{0,s'd'(u)}} \ .$$

Comme $d'(u)$ est majoré par une constante M, on a bien (2.41).
□

Remarque 2.12. *La Figure 2.1 illustre le Théorème 2.4 de transport : l'image de droite représente la variance des coefficients d'ondelettes d'un processus localement dilaté :*

$$w(u,s) = E\{|\langle F, \psi_{u,s}\rangle|^2\} \ .$$

On observe en effet un transport de dans le plan $(u, \log s)$.

Ordre de grandeur
Le terme $d''(u)/d'(u)$ apparaît comme un terme de vitesse dans l'équation de transport (2.41). Cette équation extrait ainsi la dilatation locale du processus localement dilaté, et nous souhaitons l'utiliser pour estimer $d''(u)/d'(u)$. Pour que ceci soit possible, il faut que l'erreur que représente le second membre de l'équation de transport (2.41) soit bien contrôlée. Nous vérifions dans cette section que sous des hypothèses assez faibles sur le comportement de la covariance de R au voisinage de 0,

$$\frac{\partial}{\partial u} w(u,s)$$

est de l'ordre de

$$\frac{1}{s}\|K_R\|^2_{L_{0,sd'(u)}} \ ,$$

c'est-à-dire d'un plus grand ordre que le second membre, qui est en

$$\mathcal{O}(s)\frac{1}{s}\|K_R\|^2_{L_{0,sd'(u)}} \ .$$

Théorème 2.5. *Supposons qu'il existe une constante* α, *et deux constantes* A *et* B *telles que la covariance* c *de* R *vérifie lorsque* $\delta > 0$ *et* $\delta \to 0$:

$$\begin{aligned} c(\delta) - c(0) &= A\delta^\alpha + o(\delta^\alpha) && (2.46)\\ c'(\delta) &= B\delta^{\alpha-1} + o(\delta^{\alpha-1}) && (2.47)\end{aligned}$$

Si d'' *ne s'annule pas en* u, *alors, il existe une constante* C *telle que lorsque* $s \to 0$,

$$\frac{\partial w}{\partial u}(u,s) = C\frac{1}{s}\|K_R\|^2_{L_{0,sd'(u)}} \ . \qquad (2.48)$$

L'équation de transport (2.41) devient alors

$$(1+\mathcal{O}(s))\frac{\partial}{\partial u}w(u,s) - \frac{d''(u)}{d'(u)}\frac{\partial}{\partial \log s}w(u,s) = 0 \ . \tag{2.49}$$

Preuve La variance des coefficients d'ondelettes $w(u,s)$ s'écrit

$$w(u,s) = \iint c(d(x)-d(y))\psi_s^*(x-u)\psi_s(y-u)dxdy \ ,$$

soit par changement de variable en x et en y,

$$w(u,s) = \iint c(d(u+sx)-d(u+sy))\psi^*(x)\psi(y) \ dx \ dy \ . \tag{2.50}$$

Nous allons dériver (2.50) par rapport à u et évaluer l'ordre de grandeur du résultat.

$$\frac{\partial}{\partial u}w(u,s) = \\ \iint (d'(u+sx)-d'(u+sy))\, c'(d(u+sx)-d(u+sy))\psi^*(x)\psi(y) \ dx \ dy \ .$$

La fonction c' n'est pas définie en 0, mais puisque $d'(u+sx)-d'(u+sy)$ s'annule pour $x=y$, on peut prolonger $(d'(u+sx)-d'(u+sy))\,c'(d(u+sx)-d(u+sy))$ par continuité en $x=y$.
La condition (2.47) sur la fonction de covariance c permet de montrer, en traitant séparément les cas $x \geq y$ et $x < y$, que

$$(d'(u+sx)-d'(u+sy))\,c'(d(u+sx)-d(u+sy)) = \\ C'd''(u)d'(u)^{\alpha-1}s^\alpha|x-y|^\alpha + o(s^\alpha) \ .$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial u}w(u,s) = s^\alpha\left(C'd''(u)d'(u)^{\alpha-1}\iint |x-y|^\alpha\psi^*(x)\psi(y) \ dx \ dy\right) + o(s^\alpha) \tag{2.51}$$

Estimons maintenant le second membre de (2.48) : pour $f_{0,sd'(u)} \in L_{0,sd'(u)}$,

$$\langle K_R f_{0,sd'(u)}, f_{0,sd'(u)}\rangle = \iint c(sd'(u)(x-y))f(x)f(y)dxdy$$

donc d'après la condition (2.46),

$$\langle K_R f_{0,sd'(u)}, f_{0,sd'(u)}\rangle = s^\alpha d'(u)^\alpha \iint |x-y|^\alpha f(x)f(y)dxdy + o(s^\alpha)$$

Or

$$\begin{aligned}
\|K_R\|^2_{L_{0,sd'(u)}} &= \sup_{f_{0,sd'(u)}\in L_{0,sd'(u)}} \frac{\langle K_R f_{0,sd'(u)}, f_{0,sd'(u)}\rangle}{\|f_{0,sd'(u)}\|_2^2} \\
&= \sup_{f\in L_{0,sd'(u)}} \frac{s^\alpha d'(u)^\alpha \iint |x-y|^\alpha f(x)f(y)dxdy + o(1)}{\frac{1}{sd'(u)}\|f\|_2^2} \\
&= s^{\alpha+1}d'(u)^{\alpha+1} \sup_{f\in L_{0,sd'(u)}} \frac{\iint |x-y|^\alpha f(x)f(y)dxdy + o(1)}{\|f\|_2^2}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

En comparant (2.51) et (2.52), on obtient le résultat (2.48) cherché.
□

Remarque 2.13. *Dans le cas où $d''(u) = 0$, si $d^{(3)}(u) \neq 0$, on peut adapter la démonstration ci-dessus : par un développement de Taylor au second ordre de $d'(u+sx) - d'(u+sy)$, on montre dans ce cas que $\frac{\partial}{\partial u}w(u,s)$ est de l'ordre de $\mathcal{O}(s)\frac{1}{s}\|K_R\|^2_{L_{0,sd'(u)}}$.*

Remarque 2.14. *On peut imaginer analyser les processus localement dilatés avec une autre méthode : on pourrait créer un dictionnaire constitué de bases de* chirps *localisés [50], avec tous les positions et orientations de chirps possibles, puis utiliser un algorithme de recherche de meilleure représentation, tel que le* matching pursuit *[47], afin de trouver les différentes positions et orientations de chirps qui sont le plus corrélés avec le processus. La dilatation locale serait ensuite donnée par la variation spatiale des orientations des différents chirps sélectionnés. L'inconvénient de cette méthode est son coût, dû à la taille gigantesque d'un dictionnaire devant contenir toutes les positions et orientations possibles des chirps. Au contraire, notre méthode n'utilise que des fonctions d'ondelettes classiques, et de plus, ne nécessite une décomposition que sur* une seule *échelle s (la plus petite possible afin que le terme en $\mathcal{O}(s)$ soit petit). Cette méthode est donc peu coûteuse en temps de calcul.*

2.4.4 Exemple du mouvement brownien fractionnaire

Le mouvement brownien fractionnaire a été introduit par Mandelbrot et Van Ness [49], et sa transformée en ondelettes a été largement étudiée (Flandrin [28], Wornell [71, 72], Masry [51], Abry et al. [1]).
C'est un processus gaussien centré R, dépendant d'un paramètre H appelé paramètre de Hurst ($0 < H < 1$), et qui a pour covariance

$$E\{R(x)R(y)\} = \frac{1}{2}\sigma^2[|x|^{2H} + |y|^{2H} - |x-y|^{2H}] \ . \tag{2.53}$$

Le mouvement brownien fractionnaire R n'est pas stationnaire, mais il est à accroissements stationnaires : la loi de $R(x) - R(y)$ ne dépend que de $x - y$. En particulier, la variance de $R(x) - R(y)$, notée $\tilde{c}(x - y)$, vérifie :

$$\begin{aligned}\tilde{c}(x-y) =& E\{|R(x) - R(y)|^2\} \\ =& E\{|R(x)^2\} + E\{|R(y)^2\} - 2E\{R(x)R(y)\} \\ =& \sigma^2|x-y|^{2H} \quad \text{d'après (2.53).}\end{aligned} \tag{2.54}$$

Nous avons noté dans la Remarque 2.11 que le Théorème 2.2 donnant l'équation de conservation est également valable si le processus R est dans la classe des processus à accroissements stationnaires. Le Théorème 2.2 s'applique donc à un processus $F = DR$ localement dilaté à partir d'un mouvement brownien fractionnaire R. La variance des coefficients d'ondelettes d'un mouvement brownien fractionnaire satisfait à

$$\langle K_R \psi_{v,s}, \psi_{v,s} \rangle = \frac{1}{2} \iint \tilde{c}(x-y) \psi_{v,s}(x) \psi_{v,s}(y) dx dy \ , \tag{2.55}$$

et la fonction $\tilde{c}(\delta) = \sigma^2 |\delta|^{2H}$ satisfait aux hypothèses (2.46) et (2.47) introduites plus haut.

2.5 En deux dimensions

Nous allons maintenant étendre la stationnarisation d'un processus localement dilaté à un processus défini sur $\mathbb{R}^2$:

$$F(\boldsymbol{x}) = R(d(\boldsymbol{x}))$$

où d est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que la jacobienne $J_{\boldsymbol{u}}$ de d à la position $\boldsymbol{u}$ est inversible, et que sa norme $\|J_{\boldsymbol{u}}\|$, qui est égale à sa plus grande valeur singulière, est bornée supérieurement, et inférieurement, par deux constantes strictement positives.

2.5.1 Warplets

On étend les transformations affines monodimensionnelles en deux dimensions. Le paramètre est maintenant $\beta = (\boldsymbol{u}, S)$: $\boldsymbol{u}$ est un élément de $\mathbb{R}^2$ qui représente la position, et S une matrice inversible.
La transformation affine T_β est définie par

$$T(\boldsymbol{u}, S) f(\boldsymbol{x}) = (\det S)^{-1} f(S^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})) \ .$$

Cette transformation vérifie la propriété de groupe :

$$T_{\beta_1}T_{\beta_2} = T_{\beta_1\beta_2} \ ,$$

avec

$$\beta_1\beta_2 = (\boldsymbol{u}_1 + S_1\boldsymbol{u}_2, S_1S_2) \ .$$

L'élément neutre est $T(0, Id)$, et l'inverse de T_β est $T_\beta^{-1} = T_{\beta^{-1}}$, avec

$$\beta^{-1} = (-S^{-1}\boldsymbol{u}, S^{-1}) \ .$$

L'adjoint de T_β est $(\det S)^{-1}T_{\beta^{-1}}$.

On appelle *warplet* une fonction de la forme

$$\psi_{\boldsymbol{u},S}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\det S}\psi\left(S^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})\right) \ , \tag{2.56}$$

où ψ est une fonction de $H_{0,1}$ avec au moins un moment nul.
La norme $\|S\|^2$ est par définition la plus grande des valeurs propres de la matrice symétrique SS^T. La fonction de warplet $\psi_{\boldsymbol{u},S}$ est par conséquent un élément de $H_{\boldsymbol{u},\|S\|}$.

La Figure 2.2 montre les transformées en warplets de deux images, pour deux matrices d'échelle S fixées. On peut observer qu'à S fixé, la transformée en warplets de la texture stationnaire est statistiquement invariante dans l'espace, c'est-à-dire indépendante de la position u. Si R est stationnaire, on a l'équation de conservation suivante :

$$\nabla_{\boldsymbol{v}}\langle K_R\psi_{\boldsymbol{v},S}, \psi_{\boldsymbol{v},S}\rangle = 0 \ . \tag{2.57}$$

Par contre, la transformée en warplets de la texture localement dilatée a des variations spatiales : les régions où la transformée en warplet est importante sont les valeurs de $\boldsymbol{v}$ pour lesquelles le contenu fréquentiel local de l'image est proche de celui de $\psi_{\boldsymbol{v},S}$.

La transformée en warplets est une généralisation de la transformée en ondelettes de Gabor, qui permet elle aussi de repérer les variations fréquentielles de la texture dans une image (Bovik et al. [13]). Plusieurs résultats d'ordre physiologique démontrent la relation entre la vision bas-niveau et des filtres de style Gabor. Hubel et Wiesel [37] ont montré la présence de cellules réceptrices dans le cortex visuel du chat, qui ont une réponse sélective en fonction de la fréquence et de l'orientation du stimulus visuel. Plus tard, Daugmann

[27] a montré que les gaussiennes modulées étaient une bonne approximation de la réponse impulsionnelle de ces cellules corticales. De tels résultats confirment la pertinence de l'étude de la variation spatiale des fréquences contenues dans une image texturée par une analyse de type ondelettes de Gabor.

2.5.2 Stationnarisation

Soit D l'opérateur de dilatation locale tel que

$$Df(\boldsymbol{x}) = f(d(\boldsymbol{x})) \ .$$

Pour une fonction f régulière, et pour $\|\boldsymbol{x}\|$ petit, on a

$$Df(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x}) = f(d(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x})) \approx f(d(\boldsymbol{u}) + J_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x})$$

où $J_{\boldsymbol{u}}$ est la jacobienne de la dilatation locale d prise au point $\boldsymbol{u}$. Il en résulte que l'opérateur $D_{d(\boldsymbol{u})}$ défini par $D_{d(\boldsymbol{u})} = (\det J_{\boldsymbol{u}})^{-1} T_{\beta(\boldsymbol{u})}$ avec $\beta(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u} - J_{\boldsymbol{u}}^{-1} d(\boldsymbol{u}), J_{\boldsymbol{u}}^{-1})$ satisfait

$$Df \approx D_{d(\boldsymbol{u})} f \ .$$

Le Théorème 2.6 ci-dessous, qui est l'extension bidimensionnelle du Théorème 2.3, donne une version précise de cette approximation, en montrant que $D_{d(\boldsymbol{u})}^{-1}$ est tangent à D^{-1} en $d(\boldsymbol{u})$ au sens de la Définition 2.1.

Théorème 2.6. *Soit* $\beta(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u} - J_{\boldsymbol{u}}^{-1} d(\boldsymbol{u}), J_{\boldsymbol{u}}^{-1})$*, et soit*

$$D_{d(\boldsymbol{u})} = (\det J_{\boldsymbol{u}})^{-1} T_{\beta(\boldsymbol{u})} \ .$$

Le processus $F_{d(\boldsymbol{u})} = D_{d(\boldsymbol{u})}^{-1} F$ *est un processus stationnarisé.*

Ce Théorème se montre grâce au Lemme suivant :

Lemme 2.1. *Si* $|d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}| = \mathcal{O}(s)$*, on a*

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \left(J_{\boldsymbol{u}}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}) \right) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(J_{\boldsymbol{u}}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}) \right) \ J_{\boldsymbol{u}} = \mathcal{O}(s^2) \ .$$

Preuve Soit $B_{\boldsymbol{u}} = J_{\boldsymbol{u}}^{-1}$. La Jacobienne de $d^{-1}(\boldsymbol{x})$ à la position $\boldsymbol{x}$ est $J_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}^{-1}$, donc

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \left(B_{\boldsymbol{u}}^{-1}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u})\right) = B_{\boldsymbol{u}}^{-1} J_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}^{-1} . \tag{2.58}$$

D'autre part, pour tout vecteur v,

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}(B_{\boldsymbol{u}}^{-1}\ v) = -B_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\nabla_{\boldsymbol{u}} B_{\boldsymbol{u}}\ v) B_{\boldsymbol{u}}^{-1} ,$$

donc

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} \left(B_{\boldsymbol{u}}^{-1}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u})\right) = -B_{\boldsymbol{u}}^{-1} \left((\nabla_{\boldsymbol{u}} B_{\boldsymbol{u}})\ (d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u})\right) B_{\boldsymbol{u}}^{-1} - B_{\boldsymbol{u}}^{-1} . \tag{2.59}$$

Soit $\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ défini par

$$\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \nabla_{\boldsymbol{u}} \left(B_{\boldsymbol{u}}^{-1}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u})\right) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(B_{\boldsymbol{u}}^{-1}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u})\right)\ J_{\boldsymbol{u}} .$$

D'après (2.58) et (2.59),

$$\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = B_{\boldsymbol{u}}^{-1}(J_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}^{-1} - J_{\boldsymbol{u}}^{-1}) J_{\boldsymbol{u}} - B_{\boldsymbol{u}}^{-1} \left((\nabla_{\boldsymbol{u}} B_{\boldsymbol{u}})(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u})\right) B_{\boldsymbol{u}}^{-1} \tag{2.60}$$

Mais lorsque $|d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}| = \mathcal{O}(s)$,

$$J_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}^{-1} - J_{\boldsymbol{u}}^{-1} = (\nabla_{\boldsymbol{u}} J_{\boldsymbol{u}}^{-1})(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}) + \mathcal{O}(s^2) ,$$

donc on a effectivement

$$\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = B_{\boldsymbol{u}}^{-1} \left((\nabla_{\boldsymbol{u}} J_{\boldsymbol{u}}^{-1})(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}) J_{\boldsymbol{u}} - (\nabla_{\boldsymbol{u}} B_{\boldsymbol{u}})(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}) B_{\boldsymbol{u}}^{-1}\right) + \mathcal{O}(s^2) .$$

Puisque $B_{\boldsymbol{u}} = J_{\boldsymbol{u}}^{-1}$, $\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \mathcal{O}(s^2)$.
□

Preuve du Théorème 2.6
Il nous faut vérifier les conditions (2.15) et (2.16). Soit $\boldsymbol{v} = d(\boldsymbol{u})$; soit $f_{\boldsymbol{v},s} \in H_{\boldsymbol{v},s}$, on a :

$$\left(D_{\boldsymbol{v}}^{-1} D\right)^* f_{\boldsymbol{v},s}(\boldsymbol{x}) = \det(J_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}^{-1}) \det(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}) f_{0,s}(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - d^{-1}(\boldsymbol{v}))) \tag{2.61}$$

donc

$$\left|\left(D_{\boldsymbol{v}}^{-1} D\right)^* f_{\boldsymbol{v},s}(\boldsymbol{x}) - f_{\boldsymbol{v},s}(\boldsymbol{x})\right| \leq \mathcal{O}(s) \|f_{0,s}\|_{H_{0,s}}$$

ce qui prouve (2.15). Différentions maintenant (2.61) par rapport à $\boldsymbol{v}$ et à $\boldsymbol{x}$ afin de prouver (2.16).

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\boldsymbol{v}} \left(\left(D_{\boldsymbol{v}}^{-1} D \right)^* f_{\boldsymbol{v},s}(\boldsymbol{x}) \right) = \\
&\qquad \det(J^{-1}_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}) \nabla_{\boldsymbol{v}} \left(\det(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}) \right) f_{0,s}(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - d^{-1}(\boldsymbol{v}))) \\
&\qquad\quad + \det(J^{-1}_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}) \det(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})})(\nabla f_{0,s}) \nabla_{\boldsymbol{v}}(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - d^{-1}(\boldsymbol{v})))
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.1, on a

$$\nabla_{\boldsymbol{v}}(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - d^{-1}(\boldsymbol{v}))) + \nabla_{\boldsymbol{x}}(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}(d^{-1}(\boldsymbol{x}) - d^{-1}(\boldsymbol{v}))) = \mathcal{O}(s^2) \ .$$

Par ailleurs,

$$\det(J^{-1}_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}) \nabla_{\boldsymbol{v}} \left(\det(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}) \right) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\det(J^{-1}_{d^{-1}(\boldsymbol{x})}) \right) \det(J_{d^{-1}(\boldsymbol{v})}) = \mathcal{O}(s) \ .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left| \nabla_{\boldsymbol{v}} \left(\left(D_{\boldsymbol{v}}^{-1} D \right)^* f_{\boldsymbol{v},s}(\boldsymbol{x}) \right) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\left(D_{\boldsymbol{v}}^{-1} D \right)^* f_{\boldsymbol{v},s}(\boldsymbol{x}) \right) \right| &\leq \mathcal{O}(s) \|f_{0,s}\|_\infty + \mathcal{O}(s^2) \|\nabla f_{0,s}\|_\infty \\
&\leq \mathcal{O}(s) \|f_{0,s}\|_{H_{0,s}} \ .
\end{aligned}$$

□

Maintenant qu'il est établi que le processus $D^{-1}_{d(\boldsymbol{u})} F$ est un processus stationnarisé, nous pouvons en tirer une conséquence directe par l'application du Théorème 2.2. Nous réécrivons le résultat (2.17) de ce Théorème, en deux dimensions : si $\psi_{\boldsymbol{v},S}$ est une warplet de $H_{\boldsymbol{v},\|S\|}$, et si $s = \|S\|$, on a, lorsque $s \to 0$:

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \langle K_{F_{\boldsymbol{v}}} \psi_{\boldsymbol{v},S}, \psi_{\boldsymbol{v},S} \rangle = \mathcal{O}(s) \frac{1}{s^2} \|K_R\|^2_{L_{0,s}} \ . \tag{2.62}$$

Tout comme en une dimension, cette équation de conservation asymptotique va devenir une équation de transport sur les coefficients de warplets du processus F, si on applique un résultat de migration des coefficients de warplets par transformation affine.

2.5.3 Equation de transport

La Proposition 2.5 de migration des coefficients d'ondelettes s'étend naturellement en deux dimensions.

Proposition 2.6 (Migration). *Les coefficients d'ondelettes du processus stationnarisé $F_{d(\boldsymbol{u})}$ et du processus localement dilaté F sont reliés par*

$$\langle F_{d(\boldsymbol{u})}, \psi_{d(\boldsymbol{u}),S} \rangle = \langle F, \psi_{\boldsymbol{u}, J_{\boldsymbol{u}}^{-1} S} \rangle \tag{2.63}$$

Preuve Puisque $F_{d(\boldsymbol{u})} = D_{d(\boldsymbol{u})}^{-1} F$,

$$\langle F_{d(\boldsymbol{u})} \psi_{d(\boldsymbol{u}),S} \rangle = \langle F, {D_{d(\boldsymbol{u})}^{-1}}^* \psi_{d(\boldsymbol{u}),S} \rangle \ .$$

Or $D_{d(\boldsymbol{u})} = |J_{\boldsymbol{u}}^{-1}| T_{\beta(\boldsymbol{u})}$ avec $\beta(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u} - J_{\boldsymbol{u}}^{-1} d(\boldsymbol{u}), J_{\boldsymbol{u}}^{-1})$, donc

$${D_{d(\boldsymbol{u})}^{-1}}^* = T_{\beta(\boldsymbol{u})} \ .$$

Calculons donc $T_{\beta(\boldsymbol{u})} \psi_{d(\boldsymbol{u}),S}$.

$$\begin{aligned} T_{\beta(\boldsymbol{u})} \psi_{d(\boldsymbol{u}),S}(\boldsymbol{x}) =& |S^{-1} J_{\boldsymbol{u}}| \psi \left(S^{-1} J_{\boldsymbol{u}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}) \right) \\ =& \psi_{\boldsymbol{u}, J_{\boldsymbol{u}}^{-1} S}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

et on en déduit directement (2.63).
$\square$

On note $w(\boldsymbol{u}, S)$ la variance des coefficients de warplets de F à la position $\boldsymbol{u}$ et à l'échelle s :

$$w(\boldsymbol{u}, S) = \langle K_F \psi_{\boldsymbol{u},S}, \psi_{\boldsymbol{u},S} \rangle = E\{ |\langle F, \psi_{\boldsymbol{u},S} \rangle|^2 \} \tag{2.64}$$

Le Théorème ci-dessous qui donne une équation de transport pour $w(\boldsymbol{u}, S)$ se démontre grâce à (2.62), et à la Proposition de migration que nous venons de prouver.

Théorème 2.7. *Soit S_0 est une matrice d'échelle fixée, dont la norme est notée s_0, et soit*

$$S(\boldsymbol{u}) = J_{\boldsymbol{u}}^{-1} S_0 \ .$$

Alors

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} w(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u})) = \mathcal{O}(s_0) \frac{1}{s_0^2} \|K_R\|_{L_{0,s_0}}^2 \ . \tag{2.65}$$

Preuve Etant donnée la Proposition 2.6 de migration des coefficients de warplets, si $S(\boldsymbol{u}) = J_{\boldsymbol{u}}^{-1} S_0$,

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u})) &= E\{ |\langle F, \psi_{\boldsymbol{u},S(\boldsymbol{u})} \rangle|^2 \} \\ &= E\{ |\langle F_{d(\boldsymbol{u})}, \psi_{d(\boldsymbol{u}),S_0} \rangle|^2 \} \\ &= \langle K_{F_{d(\boldsymbol{u})}} \psi_{d(\boldsymbol{u}),S_0}, \psi_{d(\boldsymbol{u}),S_0} \rangle \ . \end{aligned}$$

Mais (2.62) montre que

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}\langle K_{F_{d(\boldsymbol{u})}}\psi_{d(\boldsymbol{u}),S_0},\psi_{d(\boldsymbol{u}),S_0}\rangle=\mathcal{O}(s_0)\frac{1}{s_0^2}\|K_R\|^2_{L_{0,s_0}}\ .$$

donc on a bien

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}w(\boldsymbol{u},S(\boldsymbol{u}))=\mathcal{O}(s_0)\frac{1}{s_0^2}\|K_R\|^2_{L_{0,s_0}}\ .$$

□

Pour plus de clarté, nous allons dorénavant nous placer dans un repère (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$. Le résultat (2.65) du Théorème peut se décomposer en deux équations, pour $k \in \{1, 2\}$:

$$\frac{d}{du_k}w(\boldsymbol{u},S(\boldsymbol{u}))=\mathcal{O}(s_0)\frac{1}{s_0^2}\|K_R\|^2_{L_{0,s_0}}\ . \tag{2.66}$$

Chacune de ces deux équations donne lieu à une équation de transport, ce qui étend l'équation de transport (2.49) établie dans le cas monodimensionnel, que nous rappelons :

$$(1+\mathcal{O}(s))\frac{\partial}{\partial u}w(u,s)-\frac{d''(u)}{d'(u)}\frac{\partial}{\partial\log s}w(u,s)=0\ .$$

Dans l'équation de transport monodimensionnelle, le terme

$$\frac{d''(u)}{d'(u)}$$

joue le rôle de la vitesse de transport. Ici, ce rôle est joué par les éléments $\left(a^k_{ij}(\boldsymbol{u})\right)_{i,j\in\{1,2\}}$ des matrices

$$A^k(\boldsymbol{u})=J_{\boldsymbol{u}}^{-1}\frac{\partial}{\partial u_k}(J_{\boldsymbol{u}})\ .$$

L'équivalent bidimensionnel de la dérivée logarithmique $\frac{\partial}{\partial\log s}w(u,s)$ est constitué par les éléments $\left(c_{ij}(\boldsymbol{u},S)\right)_{i,j\in\{1,2\}}$ de la matrice

$$C(\boldsymbol{u},S)=\begin{pmatrix}\frac{\partial w}{\partial s_{11}}(\boldsymbol{u},S) & \frac{\partial w}{\partial s_{12}}(\boldsymbol{u},S)\\ \frac{\partial w}{\partial s_{21}}(\boldsymbol{u},S) & \frac{\partial w}{\partial s_{22}}(\boldsymbol{u},S)\end{pmatrix}\times S^T\ . \tag{2.67}$$

Afin que l'équation de transport résultant de (2.66) soit exploitable, il faut s'assurer que le second membre de (2.66) est bien contrôlé à petite échelle.

On introduit pour cela une hypothèse d'ordre de grandeur :

Hypothèse d'ordre de grandeur : Si J est un opérateur borné, d'inverse borné, et dont le rapport des valeurs singulières est borné, il existe une constante C telle qu'au premier ordre lorsque $s = \|S\| \to 0$,

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} w(\boldsymbol{u}, JS) \;=\; C\frac{1}{s^2}\|K_R\|^2_{L_{0,s}} \; . \tag{2.68}$$

Théorème 2.8. *On suppose que l'hypothèse (2.68) sur l'ordre de grandeur est satisfaite. Si la matrice jacobienne de la dilatation locale est bornée, d'inverse bornée, et a des valeurs singulières dont le rapport est borné, alors on a l'équation de transport : pour $k \in \{1, 2\}$,*

$$(1 + \mathcal{O}(s))\frac{\partial}{\partial u_k} w(\boldsymbol{u}, S) - \sum_{i,j\in\{1,2\}} c_{ij}(\boldsymbol{u}, S)\; a^k_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0 \; . \tag{2.69}$$

Preuve Les éléments de S sont les $(s_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \; .$$

Si l'on développe la dérivée totale d/du_k de (2.65) :

$$\frac{\partial}{\partial u_k} w(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u})) + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} w(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u}))\frac{\partial s_{ij}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k} = \mathcal{O}(\sqrt{|S(\boldsymbol{u})|}) \sup_{f\in H_{0,S}} \langle K_R f', f'\rangle \; . \tag{2.70}$$

Les $(\partial s_{ij}(\boldsymbol{u})/\partial u_k)_{i,j\in\{1,2\}}$ sont les quatre éléments de la matrice

$$\frac{\partial}{\partial u_k} S(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(J_{\boldsymbol{u}}^{-1} S_0\right) = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(J_{\boldsymbol{u}}^{-1}\right) S_0 \; .$$

Et il est clair que

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(J_{\boldsymbol{u}}^{-1}\right) S_0 = -J_{\boldsymbol{u}}^{-1}\frac{\partial}{\partial u_k}(J_{\boldsymbol{u}})J_{\boldsymbol{u}}^{-1} S_0 = -A^k(\boldsymbol{u})S(\boldsymbol{u}) \tag{2.71}$$

Nous notons $\nabla_S w$ la matrice dont les éléments sont les $\frac{\partial}{\partial s_{ij}} w(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u}))$. Le second terme du membre de gauche de (2.70),

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial s_{ij}(\boldsymbol{u})}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial s_{ij}} w(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u}))$$

est un produit scalaire entre deux matrices qui, grâce à (2.71), est aussi égal à

$$Tr\left(-\nabla_S w (A^k(\boldsymbol{u}) S(\boldsymbol{u}))^T\right) = Tr\left(-\left(\nabla_S w\right) S(\boldsymbol{u})^T (A^k(\boldsymbol{u}))^T\right) \ .$$

Dans la matrice $(\nabla_S w)\, S(\boldsymbol{u})^T$, nous reconnaissons la définition (2.67) de $C(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u}))$, donc

$$\frac{\partial}{\partial u_k} w(u, S(\boldsymbol{u})) - \sum_{i,j\in\{1,2\}} c_{ij}(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u}))\ a^k_{ij}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{O}(\sqrt{|S(\boldsymbol{u})|}) \sup_{f\in H_{0,S}} \langle K_R f', f'\rangle \ .$$

Mais d'après le Théorème 2.7,

$$\frac{\partial}{\partial u_k} w(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u})) \sim C_{k,\boldsymbol{u}} \sup_{f\in H_{d(\boldsymbol{u}),S}} \langle K_R f', f'\rangle \ . \tag{2.72}$$

donc

$$(1+\mathcal{O}(\sqrt{|S(\boldsymbol{u})|}))\frac{\partial}{\partial u_k} w(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u})) - \sum_{i,j\in\{1,2\}} c_{ij}(\boldsymbol{u}, S(\boldsymbol{u}))\ a^k_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0 \ .$$

Ceci étant vrai pour toutes la matrices d'échelle de la forme

$$S(\boldsymbol{u}) = J_{\boldsymbol{u}}^{-1} S_0 \ ,$$

on en déduit que pour toute matrice d'échelle S de norme s,

$$(1+\mathcal{O}(s))\frac{\partial}{\partial u_k} w(\boldsymbol{u}, S) - \sum_{i,j\in\{1,2\}} c_{ij}(\boldsymbol{u}, S)\ a^k_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0 \ ,$$

ce qui termine la preuve du Théorème.
□

Remarque 2.15. *De même qu'en une dimension, notre méthode permet de ne calculer les coefficients d'ondelettes que pour une seule échelle s, ici, il suffira de calculer les coefficients de warplets pour un petit nombre d'échelles S (mais au moins quatre, car il y a quatre valeurs a^k_{ij} à estimer) : la méthode n'est donc pas très coûteuse. L'aspect algorithmique sera détaillé dans les Chapitres 4 et 5.*

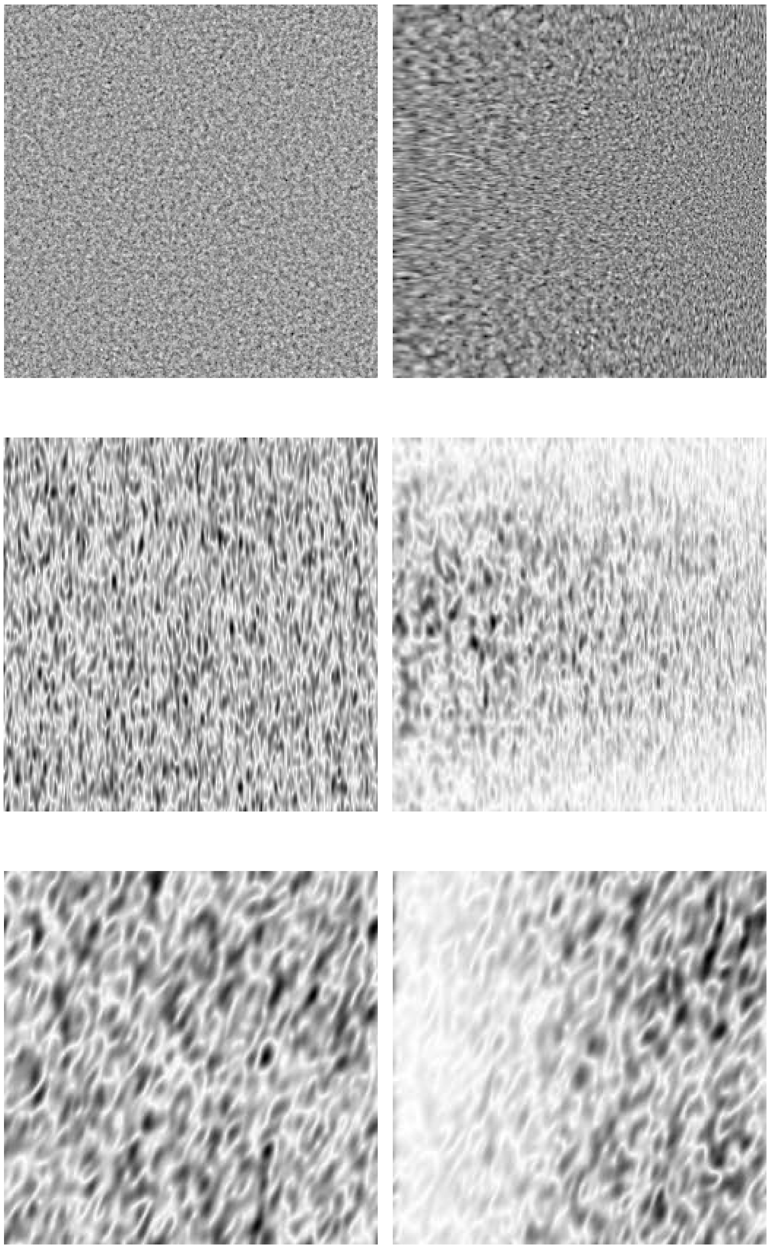


FIG. 2.2 – <u>En haut :</u> *deux textures, stationnaire à gauche, localement dilatée à droite.* <u>Au milieu :</u> *transformée en warplet de ces deux textures, représentée en niveaux de gris, en fonction de la position* $\boldsymbol{u}$*, pour une échelle* S *allongée horizontalement. La transformée en warplets de la texture stationnaire ne dépend pas de la position* $\boldsymbol{u}$*, contrairement à celle de la texture localement dilatée.* <u>En bas :</u> *transformée en warplets de ces deux textures, pour une échelle* S *allongée verticalement.*

Chapitre 3

Stationnarité tangentielle

Nous souhaiterions analyser des processus de la forme

$$F(\boldsymbol{x}) = R(p(\boldsymbol{x})) \ , \tag{3.1}$$

où p est une application de $\mathbb{R}^2$ sur une surface Σ, et R est un processus défini sur Σ. En effet, nous avons vu dans la section 1.3 que l'intensité de l'image d'une surface texturée peut s'écrire sous cette forme : R représente alors la réflectance de la surface, et p est la réciproque de la projection perspective définie à partir de la surface Σ.

Dans le chapitre précédent, nous avons traité le cas des processus localement dilatés F de la forme

$$F(\boldsymbol{x}) = R(d(\boldsymbol{x})) \ , \tag{3.2}$$

où $d(\boldsymbol{x})$ applique $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, et R est un processus stationnaire sur $\mathbb{R}^2$. Nous souhaiterions donc ramener le problème (3.1) au problème (3.2), que nous savons traiter, et en particulier, trouver des conditions sur le processus R dans (3.1) qui permette de faire la liaison entre les deux problèmes.

Il existe au moins un cas où (3.1) peut facilement se ramener au problème connu : il s'agit du cas où la surface Σ est développable, comme nous l'avons déjà évoqué. Il est alors possible de dérouler la surface en un plan, sans déformer le processus R qui modélise la réflectance. On peut donc écrire

$$R(p(\boldsymbol{x})) = R_0(\ell(p(\boldsymbol{x}))) \ ,$$

où l'application ℓ, de Σ dans $\mathbb{R}^2$, représente le développement de la surface Σ en un plan. Si le processus R_0 de $\mathbb{R}^2$ est un processus stationnaire, les résultats du Chapitre 2 montrent que l'on peut écrire une équation de transport, dans laquelle le gradient renormalisé de la jacobienne $J_{\boldsymbol{u}}$ de $d = \ell \circ p$:

$$J_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\nabla J_{\boldsymbol{u}})$$

joue le rôle de la vitesse de transport. Mais la différentielle de ℓ est simplement une matrice de rotation dans $\mathbb{R}^3$ qui aplique les vecteurs du plan tangent à la surface Σ sur les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ sur lequel R_0 est défini. Si $J(p)_{\boldsymbol{u}}$ désigne la jacobienne de p en $\boldsymbol{u}$, on peut donc identifier les deux gradients normalisés

$$J_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\nabla J_{\boldsymbol{u}}) = J(p)_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\nabla J(p)_{\boldsymbol{u}}) \ .$$

On reconnaît en $J(p)_{\boldsymbol{u}}^{-1}(\nabla J(p)_{\boldsymbol{u}})$ le gradient de texture introduit par Malik et Rosenholtz [45], dont nous avons montré au paragraphe 1.3.6 qu'il permet l'estimation de la forme de la surface.

Nous allons utiliser un relèvement local de la surface sur son plan tangent, qui généralise l'application $\ell : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ à des surfaces de courbure gaussienne quelconque. Fixons une position $\boldsymbol{u}$ dans l'image : la Définition 3.1 introduit grâce au relèvement local un processus $R_{p(\boldsymbol{u})}$ sur le plan tangent en $\boldsymbol{u}$ à Σ. La Proposition 3.1 montre l'existence d'une application $d^{\boldsymbol{u}}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, telle que dans un voisinage de $\boldsymbol{u}$,

$$R(p(\boldsymbol{x})) = R_{p(\boldsymbol{u})}(d^{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})).$$

Nous avons bien ramené (3.1) à un problème de type (3.2), mais nous ne pouvons pas nous permettre d'imposer que le processus $R_{p(u)}$ soit stationnaire dans $\mathbb{R}^2$, à cause des distorsions induites par le relèvement local sur le processus.

Nous introduisons dans la Définition 3.2 une notion de *stationnarité tangentielle* qui est la condition la plus faible que l'on puisse imposer sur le processus $R_{p(u)}$ tout en maintenant la validité de résultats du chapitre précédent, ce qui fait l'objet du Théorème 3.1.

Plan du Chapitre La section 3.1 donne un bref aperçu du problème de placage de texture, dans lequel la courbure des surfaces induit, comme ici, des problèmes spécifiques. Le relèvement d'un processus sur le plan tangent fait l'objet de la section 3.2. Dans la section 3.3 nous introduisons la stationnarité tangentielle, et nous démontrons le théorème de stationnarisation. Enfin, la section 3.4 montre que la stationnarité tangentielle est une hypothèse réaliste, en considérant des exemples simples de textures plaquées sur des sphères qui satisfont à cette propriété.

3.1 Placage de texture

Bien que ce soit un problème bien distinct du nôtre, nous présentons rapidement le problème du placage de texture, car il permet de se faire une intuition sur les problèmes dus à la courbure gaussienne des surfaces. Le placage de texture consiste à simuler numériquement la texturation d'objets tridimensionnels, avec plusieurs objectifs possibles : il peut s'agir de rendre les objets plus réalistes, de faire oublier le fait que la forme de l'objet est discrétisée, ou bien de représenter davantage d'information dans une image. En imagerie médicale, où il est fréquent de montrer des volumes, leur forme apparaît plus nettement si on les texture : Interrante [39] montre qu'on visualise mieux la forme d'un volume à travers lequel on regarde un autre volume par transparence, si la surface du volume extérieur est texturée.

On peut dégager trois grandes familles de méthodes pour le placage de texture.

- Le mapping, dont l'origine remonte à Catmull [16], met en correspondance des coordonnées cartésiennes dans le plan, et un système de coordonnées paramétriques sur la surface de l'objet à texturer. A l'aide de cette correspondance, on peut projeter une texture plane sur une surface courbe. Dans le cas de surfaces dont la courbure gaussienne est nulle, comme un cône ou un cylindre, ceci revient à "habiller" la surface comme le ferait un tailleur. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle induit des distorsions lorsque la surface a une courbure gaussienne non nulle. Des méthodes de mapping plus élaborées, proposées par Bennis [8], puis par Maillot [44], permettent de minimiser les distorsions de la texture.

- Les textures procédurales consistent à synthétiser des textures en prenant en compte *ab initio* la forme de la surface. Une méthode de Gagalowicz et Ma [31] utilise un modèle statistique afin de générer sur une surface un texture qui ressemble à un échantillon de texture plane.
  Une autre méthode, s'inspirant de la morphogenèse [67], consiste à simuler par des équations de réaction-diffusion la façon dont les textures sont produites sur des surfaces naturelles. Witkin et Kass [70] ont montré des résultats numériques convaincants de cette méthode, et une simulation spectaculaire de Turk [68] montre la formation des taches sur une girafe, au cours de la croissance fétale.
  Un troisième exemple de textures procédurales sont celles qui proviennent de la rugosité de la surface elle-même. Ainsi le mouvement brownien fractionnaire permet de synthétiser des montagnes, des nuages,

des rochers (voir Pentland [56] et les références de cet article).

– Dans les modèles de textures tridimensionnels, la texture est définie a priori dans tout un volume contenant l'objet à texturer. Il suffit alors de découper le volume à la forme de l'objet souhaité, à la manière d'un sculpteur. Il existe des modélisations tridimensionnelles réalistes de matériaux tels que le bois, le marbre, le verre, ou bien des nuages.

3.2 Relèvement sur le plan tangent

Nous montrons ici une technique bien connue qui permet de relever le voisinage d'un point P d'une surface Σ sur le plan tangent $T_P(\Sigma)$. Etant donné un processus R défini sur une surface Σ, on peut alors définir un relèvement en P de R, qui est un processus R_P défini sur $T_P(\Sigma)$.

Application exponentielle

Une surface développable Σ est localement isométrique au plan $\mathbb{R}^2$ (théorème de Minding, dans Do Carmo [15]). Si Σ est un cône ou un cylindre, l'isométrie locale autour d'un point P est celle qui, à tout point M de la surface, associe son correspondant sur la surface plane obtenue lorsqu'on déroule Σ tout en laissant fixe le plan tangent en P (Figure 3.1).

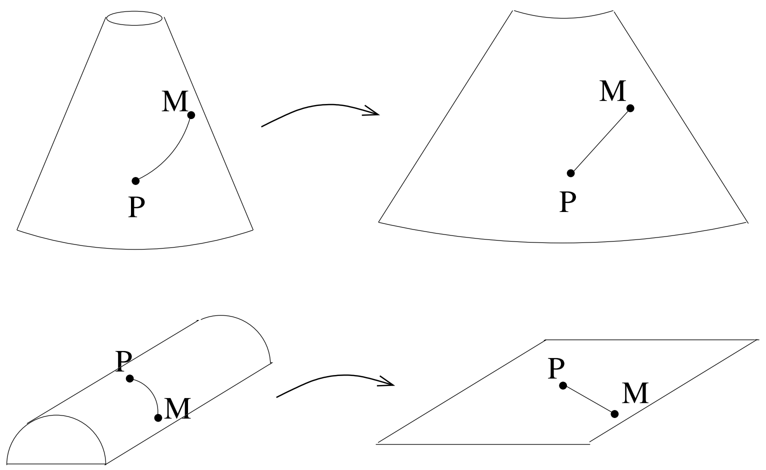


FIG. 3.1 – *L'isométrie locale entre une surface développable Σ et le plan est représentée pour un cône (en haut) et pour un cylindre (en bas). Elle fait correspondre les points obtenus lorsque on déroule la surface tout en laissant fixe le plan tangent en P.*

Pour une surface non développable Σ, bien qu'il n'existe plus d'isométrie locale entre $\mathbb{R}^2$ et Σ, il est possible de mettre en correspondance un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans le plan tangent $T_P(\Sigma)$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de P sur Σ grâce à l'application exponentielle $\exp_P$ (Do Carmo [15], Conlon [23]). Celle-ci transforme les droites radiales issues de 0 dans $T_P(\Sigma)$ en géodésiques partant de P sur Σ, tout en préservant les longueurs le long de ces géodésiques (Fig. 3.2). Dans le cas des surfaces développables, l'application exponentielle $\exp_P$ coïncide avec l'isométrie décrite plus haut.

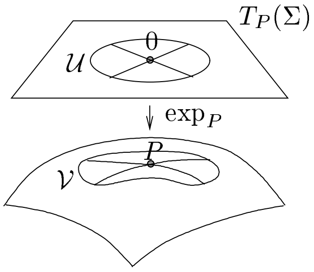


FIG. 3.2 – *L'application exponentielle* $\exp_P$ *met en correspondance un voisinage* $\mathcal{U}$ *du plan tangent* $T_P(\Sigma)$ *avec un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* Σ.

Relèvement

Etant donné un processus R défini au voisinage de P sur une surface Σ, on peut, grâce à l'application exponentielle, relever le processus R en un processus R_P défini sur le plan tangent $T_P(\Sigma)$ de la façon suivante (Pennec [55]) :

Définition 3.1 (Relèvement). *Le processus* R_P *défini dans un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* 0 *par*

$$R_P(\boldsymbol{v}) = R(\exp_P(\boldsymbol{v})) \tag{3.3}$$

est appelé le relèvement *de* R *en* P.

La Proposition suivante montre qu'on peut localement ramener le problème (3.1) à un problème de type (3.2).

Proposition 3.1. *Pour toute position* u *de* $\mathbb{R}^2$, *il existe un voisinage* $\mathcal{W}_{\boldsymbol{u}}$ *de* $\boldsymbol{u}$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *et une application* $d^{\boldsymbol{u}} : \mathcal{W}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{R}^2$, *telle que pour* $x \in \mathcal{W}_{\boldsymbol{u}}$,

$$R(p(\boldsymbol{x})) = R_{p(\boldsymbol{u})}(d^{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})) \ . \tag{3.4}$$

De plus, si $J(d^{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}'}$ désigne la jacobienne de $d^{\boldsymbol{u}}$ en $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{W}_{\boldsymbol{u}}$, on a

$$J(d^{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}} = J(p)_{\boldsymbol{u}} \ . \tag{3.5}$$

Preuve Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$, et soit $\mathcal{V}$ un voisinage de $p(\boldsymbol{u})$ où la réciproque de l'application exponentielle, notée $\log_{p(\boldsymbol{u})}$, est définie. On peut alors définir un voisinage $\mathcal{W}_{\boldsymbol{u}} = p^{-1}(\mathcal{V})$ autour de $\boldsymbol{u}$, tel que pour tout $x \in \mathcal{W}_{\boldsymbol{u}}$, $p(x)$ se relève sur le plan tangent en $\log_{p(\boldsymbol{u})}(p(x))$. Par définition du processus $R_{p(\boldsymbol{u})}$ relevé en $p(\boldsymbol{u})$, l'application

$$d^{\boldsymbol{u}} : \mathcal{W}_{\boldsymbol{u}} \to \mathbb{R}^2 \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \log_{p(\boldsymbol{u})}(p(\boldsymbol{x})) \tag{3.7}$$

satisfait

$$R(p(\boldsymbol{x})) = R_{p(\boldsymbol{u})}(d^{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})) \ .$$

De plus, la différentielle de $\exp_P$ en P est l'identité, donc celle de $\log_P$ en P est également l'identité, et ceci montre que

$$J(d^{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}} = J(p)_{\boldsymbol{u}} \ .$$

□

3.3 Stationnarité tangentielle

Pour appliquer les résultats de stationnarisation du Chapitre précédent, le processus stationnaire R défini sur $\mathbb{R}^2$ doit être remplacé par le relèvement R_P. Ce dernier n'est cependant en général pas stationnaire mais déformé.

La définition de stationnarité tangentielle (Définition 3.2) va permettre de contrôler la non-stationnarité du relèvement R_P de sorte que le processus F puisse être stationnarisé avec le même ordre d'erreur que dans le chapitre précédent (Théorème 3.1).

Pour pouvoir comparer les processus tangentiellement stationnaires aux processus stationnaires classiques, nous énonçons une caractérisation des processus stationnaires :

Proposition 3.2. *Le processus centré R dont la covariance est continue est stationnaire au sens large si et seulement si pour toute fonction f de $H^1(\mathbb{R}^2)$,*

$$\langle K_R f, \nabla f \rangle = 0 \tag{3.8}$$

Preuve Le sens direct est une extension bidimensionnelle immédiate de la Proposition 2.3. Pour montrer la réciproque, soit $f_v = T_{\boldsymbol{v}} f$ une fonction de $H^1(\mathbb{R}^2)$. On a

$$\nabla f_{\boldsymbol{v}} = -\nabla_{\boldsymbol{v}} f_{\boldsymbol{v}}$$

donc par symétrie de l'opérateur K_R, la condition (3.8) peut s'écrire :

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \langle K_R T_{\boldsymbol{v}} f, T_{\boldsymbol{v}} f \rangle = 0 \ .$$

La preuve de la stationnarité de R est alors une extension bidimensionnelle immédiate de la preuve de la réciproque de la Proposition 2.4.

□

La définition de stationnarité tangentielle ci-dessous est une définition locale,

qui fait appel aux espaces de fonctions à support compact $L_{\boldsymbol{v},s}$ et $H_{\boldsymbol{v},s}$ définis dans le paragraphe 2.5.1.

Définition 3.2 (Stationnarité tangentielle). *Le processus R_P est tangentiellement stationnaire si lorsque $s \to 0$, pour toute fonction f de $H_{\boldsymbol{v},s}$, avec $\|\boldsymbol{v}\|_2 \leq s$,*

$$\langle K_{R_P} f, \nabla f \rangle = \mathcal{O}(s) \frac{1}{s^2} \|K_{R_P}\|^2_{L_{0,s}} \ .$$

Remarque 3.1. *Plusieurs travaux ont tenté de définir une notion de stationnarité pour le problème de* Shape from Texture. *Kanatani et Chou [40] ont introduit une notion de stationnarité basée sur la densité de la texture. C'est une hypothèse faible, qui ne porte que sur des statistiques au premier ordre du processus, et qui ne permet pas d'incorporer un terme de variation d'amplitude $a(x)$. L'hypothèse de stationnarité de Malik et Rosenholtz [45] utilise la notion de transport parallèle sur la surface, et rencontre des difficultés (Gårding [33]) si la courbure gaussienne de la surface est non nulle, à cause de l'angle d'holonomie.*

Si $R_{p(u)}$ est tangentiellement stationnaire, on peut étendre le Théorème 3.1 de stationnarisation aux processus localement dilatés qui satisfont, localement autour de $\boldsymbol{u}$, à

$$F(\boldsymbol{x}) = R_{p(u)}(d^u(\boldsymbol{x})) \ .$$

Théorème 3.1 (Stationnarisation). *Soit $\mathcal{W}_{\boldsymbol{u}}$ un voisinage de $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe un processus tangentiellement stationnaire $R_{p(\boldsymbol{u})}$ et une application $d^{\boldsymbol{u}}$ de $\mathcal{W}_{\boldsymbol{u}}$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que*

$$F(x) = R_{p(\boldsymbol{u})}(d^{\boldsymbol{u}}(x)) \ .$$

Etant donné $s > 0$, soit $\boldsymbol{v}$ tel que $\|\boldsymbol{v}\|_2 \leq s$, soit $\boldsymbol{u}' = (d^{\boldsymbol{u}})^{-1}(\boldsymbol{v})$, et soit $D_{\boldsymbol{v}} = (\det J(d^{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}'})^{-1} T_{\beta(\boldsymbol{u}')}$, où

$$\beta(\boldsymbol{u}') = (\boldsymbol{u}' - J(d^{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}'}\boldsymbol{v}, J(d^{\boldsymbol{u}})^{-1}_{\boldsymbol{u}'}) \ .$$

Alors le processus $F_{\boldsymbol{v}} = D_{\boldsymbol{v}}^{-1} F$ vérifie pour $\psi_{\boldsymbol{v},S} \in H_{\boldsymbol{v},s}$ où $s = \|S\|$:

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \langle K_{F_{\boldsymbol{v}}} \psi_{\boldsymbol{v},S}, \psi_{\boldsymbol{v},S} \rangle = \mathcal{O}(s) \frac{1}{s^2} \|K_{R_{p(\boldsymbol{u})}}\|^2_{L_{0,s}} \tag{3.9}$$

lorsque $s \to 0$.

Preuve Nous allons reprendre pas à pas la démonstration du Théorème 2.2 afin de montrer (3.9). La position $\boldsymbol{u}$ étant fixée, notons $D^{\boldsymbol{u}}$ l'opérateur tel que

$$F = D^{\boldsymbol{u}} R_{p(\boldsymbol{u})}$$

au voisinage de $\boldsymbol{u}$. Soit $\psi_{\boldsymbol{v},s} \in H_{\boldsymbol{v},s}$. Tout d'abord, on peut sans peine adapter la preuve du Théorème 2.6 afin de montrer que la déformation $D_{\boldsymbol{v}}$ satisfait :

$$\begin{aligned} \left\| (D_{\boldsymbol{v}}^{-1} D^{\boldsymbol{u}})^* \psi_{\boldsymbol{v},s} - \psi_{\boldsymbol{v},s} \right\|_\infty &\leq \mathcal{O}(s) \|\psi_s\|_{H_{0,s}} \\ \left\| (\nabla_{\boldsymbol{v}} + \nabla_{\boldsymbol{x}}) (D_{\boldsymbol{v}}^{-1} D^{\boldsymbol{u}})^* \psi_{\boldsymbol{v},s} \right\|_\infty &\leq \mathcal{O}(s) \|\psi_s\|_{H_{0,s}} \end{aligned}$$

On peut donc écrire, comme dans la démonstration du Théorème 2.2, avec $I_{\boldsymbol{v}} = D_{\boldsymbol{v}}^{-1} D^{\boldsymbol{u}}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{v}} \langle K_{F_{\boldsymbol{v}}} \psi_{\boldsymbol{v},s}, \psi_{\boldsymbol{v},s} \rangle = -2 \langle K_R \ I_{\boldsymbol{v}}^* \psi_{\boldsymbol{v},s}, \nabla_{\boldsymbol{x}} (I_{\boldsymbol{v}}^* \psi_{\boldsymbol{v},s}) \rangle + \\ \mathcal{O}(s) \langle K_R \psi_{\boldsymbol{v},s}, f \rangle + \mathcal{O}(s^2) \langle K_R g, f \rangle \ . \end{aligned}$$

où f et g sont deux fonctions de $H_{\boldsymbol{v},s}$ telles que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|\psi_s\|_{H_{0,s}}$. Le troisième terme du second membre est négligeable devant les deux autres lorsque s est petit. On a déjà montré dans la preuve du Théorème 2.2 que le second terme, $\mathcal{O}(s)\langle K_R \psi_{\boldsymbol{v},s}, f \rangle$, est de l'ordre de

$$\mathcal{O}(s) \frac{1}{s^2} \|K_{R_{p(\boldsymbol{u})}}\|^2_{L_{0,s}}$$

Enfin, la condition de stationnarité tangentielle sur $R_{p(\boldsymbol{u})}$ nous assure que le premier terme est également de cet ordre. On a donc bien (3.9).

□

Une fois qu'on a ce résultat de stationnarisation, le Théorème 2.7 sur le transport de la variance des coefficients de warplets s'adaptent sans difficulté. On aboutit donc à une équation de transport dont la vitesse représente le gradient normalisé de la jacobienne:

$$\left(J(d^{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}'} \right)^{-1} \nabla_{\boldsymbol{u}'} J(d^{\boldsymbol{u}})_{\boldsymbol{u}'} \ .$$

A petite échelle $s \to 0$, on a $\boldsymbol{u}' \to \boldsymbol{u}$, donc d'après le résultat (3.5) de la Proposition 3.1, ce gradient normalisé est alors égal au gradient de texture de Malik et Rosenholtz [45] :

$$(J(p)_{\boldsymbol{u}})^{-1} \nabla_{\boldsymbol{u}} J(p)_{\boldsymbol{u}} \ .$$

3.4 Exemples de stationnarité tangentielle

Etant donné le processus relevé R_P, défini sur un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans le plan tangent $T_P(\Sigma)$, on appelle *covariance tangentielle* la covariance de R_P, définie sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$:

$$r_P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = E\left\{R_P(\boldsymbol{x}) R_P(\boldsymbol{y})\right\} \ , \tag{3.10}$$

et la covariance tangentielle décentrée de R est définie par

$$c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) = r_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\delta}) \ . \tag{3.11}$$

Dans le cas d'une surface développable, le relèvement R_P est stationnaire au sens classique dans $\mathbb{R}^2$, donc la covariance tangentielle décentrée c_P ne dépend pas de la position $\boldsymbol{v}$. La Proposition donne une condition suffisante sur c_P pour que le processus R_P soit tangentiellement stationnaire : on impose que le gradient de c_P par rapport à $\boldsymbol{v}$ soit petit, pour $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\delta}$ petits.

Proposition 3.3. *Soit P un point de Σ. Si la covariance tangentielle décentrée c_P vérifie au premier ordre lorsque $s = \|S\| \to 0$ les relations d'homogénéité :*

$$\begin{aligned} c_P(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) &= s^{\alpha} c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) \ , & (3.12) \\ \nabla_v c_P(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) &= s^{\alpha+1} \nabla_v c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) \ , & (3.13) \end{aligned}$$

alors R_P est tangentiellement stationnaire.

Preuve Soit $\psi_{\boldsymbol{w},S}$ une fonction de $H_{\boldsymbol{w},S}$, avec $\|\boldsymbol{w}\| \leq s$, où $s = \|S\|$. Pour montrer que R est tangentiellement stationnaire en P, nous allons montrer que

$$\langle K_{R_P} \psi_{\boldsymbol{w},S}, \nabla \psi_{\boldsymbol{w},S} \rangle = \mathcal{O}(s) \frac{1}{s^2} \|K_{R_P}\|_{L_{0,s}} \tag{3.14}$$

Par intégration par parties par rapport à la variable $\boldsymbol{y}$,

$$\begin{aligned}\langle K_{R_P}\psi_{\boldsymbol{w},S}, \nabla\psi_{\boldsymbol{w},S}\rangle &= \iint r_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{x})\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \\ &= \iint c_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{x})\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \\ &= -\iint \nabla_{\boldsymbol{\delta}} c_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Mais par symétrie de K_{R_P}, on peut également faire porter l'intégration par parties sur la variable $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{aligned}\langle K_{R_P}\psi_{\boldsymbol{w},S}, \nabla\psi_{\boldsymbol{w},S}\rangle &= \iint r_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\nabla_{\boldsymbol{x}}\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \\ &= \iint c_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\nabla_{\boldsymbol{x}}\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \\ &= -\iint \left(\nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \nabla_{\boldsymbol{\delta}} c_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right)\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \\ &\qquad (3.16)\end{aligned}$$

En comparant (3.15) et (3.16), on voit que

$$\begin{aligned}\langle K_{R_P}\psi_{\boldsymbol{w},S}, \nabla\psi_{\boldsymbol{w},S}\rangle &= -\frac{1}{2}\iint \nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{w},S}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \\ &= -\frac{1}{2}\iint \nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(\boldsymbol{w}+S\boldsymbol{x},S(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy}\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (3.13),

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(\boldsymbol{w}+S\boldsymbol{x},S(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})) = s^{\alpha+1}\nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(S^{-1}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \ ,$$

donc

$$\begin{aligned}\langle K_{R_P}\psi_{\boldsymbol{w},S}, \nabla\psi_{\boldsymbol{w},S}\rangle &= -\frac{1}{2}s^{\alpha+1}\iint \nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(S^{-1}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \\ &= \frac{1}{2}s^{\alpha+1}\iint c_P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\nabla_{\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{x}-S^{-1}\boldsymbol{w})\psi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy} \ . \\ &\qquad (3.17)\end{aligned}$$

Montrons maintenant que le second membre de cette expression est égal à

$$\mathcal{O}(s)\sup_{f\in L_{0,s}}\frac{\langle K_{R_P}f,f\rangle}{s^2\|f\|_2^2} \ .$$

Soit $f_{0,S} \in L_{0,s}$:

$$\begin{aligned}\langle K_{R_P} f_{0,S}, f_{0,S}\rangle &= \iint c_P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) f_{0,S}(\boldsymbol{x}) f_{0,S}(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{dxdy} \\ &= \iint c_P(S\boldsymbol{x}, S(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})) f(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{dxdy} \\ &= s^\alpha \iint c_P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{dxdy}\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (3.12). Donc

$$\mathcal{O}(s) \sup_{f_{0,S}\in L_{0,s}} \frac{\langle K_{R_P} f_{0,S}, f_{0,S}\rangle}{s^2 \|f_{0,S}\|_2^2} = \mathcal{O}(s^{\alpha+1}) \sup_{f\in L_{0,1}} \frac{\iint c_P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{dxdy}}{\|f\|_2^2} .$$

Il est clair que le second membre de (3.17) peut être majoré par l'expression ci-dessus, donc on a bien (3.14).
□

3.4.1 Texture isotrope sur la sphère

Par analogie avec de la sculpture, on peut obtenir une texture sur une surface Σ en considérant la restriction à cette surface d'une texture tridimensionnel. Pour que la texture résultant de cette restriction soit stationnaire, il faut que la texture volumique de départ soit non seulement stationnaire, mais aussi isotrope.
Pour illustrer ceci par un contre-exemple, il suffit de considérer une texture tridimensionnelle $\tilde{R}$ stratifiée, dont la covariance ne dépend que de la première coordonnée :

$$E\left\{\tilde{R}(\boldsymbol{x})\tilde{R}(\boldsymbol{y})\right\} = c(x_1 - y_1) .$$

Alors la restriction de cette texture non isotrope à une surface qui présente de la courbure dans la direction x_1 ne sera en général pas stationnaire, comme le montre la Figure 3.3.
Par contre on peut montrer que la condition de stationnarité tangentielle est vérifiée lorsque la texture volumique représentée par le processus $\tilde{R}$ est stationnaire et isotrope. La Proposition suivante traite le cas d'une surface Σ sphérique.

Proposition 3.4. *Soit $\tilde{R}$ un processus tridimensionnel, isotrope, stationnaire. Supposons que sa fonction de covariance décentrée $\tilde{c}$ vérifie au premier*

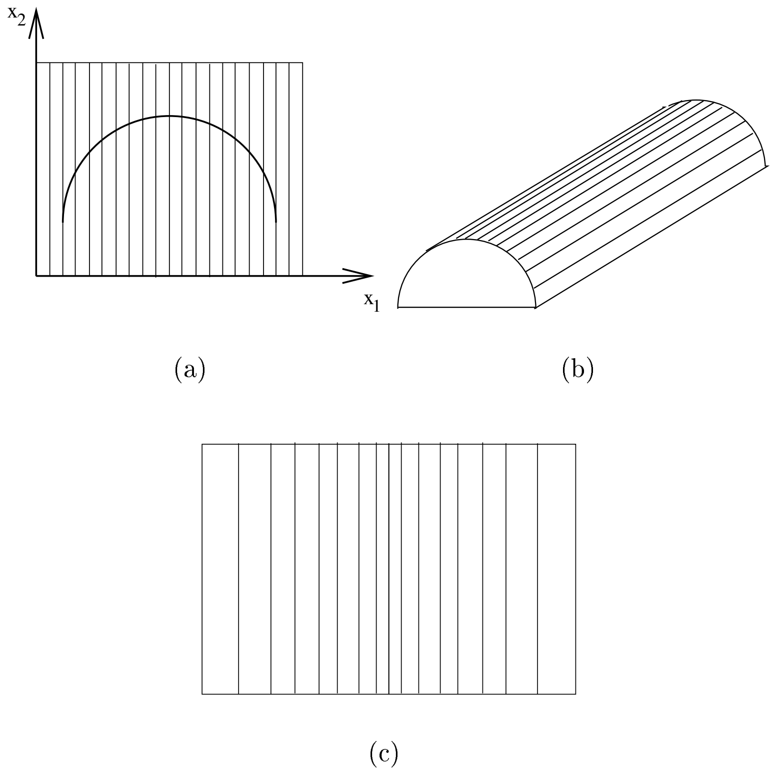


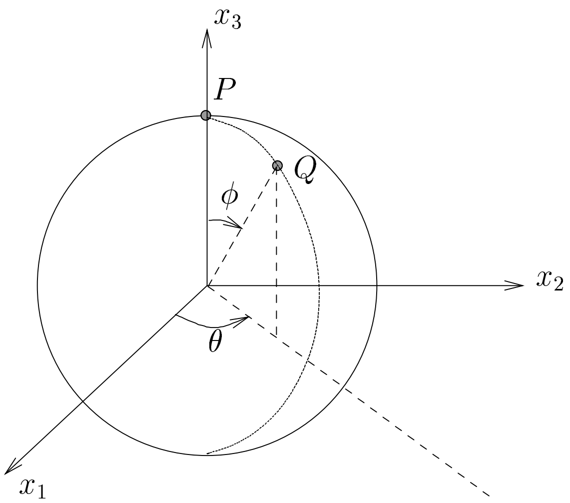
FIG. 3.3 – (a) *Une texture stationnaire tridimensionnelle stratifiée, dont la covariance ne dépend que de x_1, et un demi-cylindre, sont représentés en coupe dans le plan (x_1, x_2).* (b) *Vue oblique du demi-cylindre texturé.* (c) *Demi-cylindre texturé, déroulé en une portion de surface plane : on voit clairement qu'à cause de la courbure, la texture obtenue n'est pas stationnaire.*

ordre lorsque $s = \|S\| \to 0$ les relations d'homogénéité suivantes, pour une matrice S de $GL(\mathbb{R}^3)$:

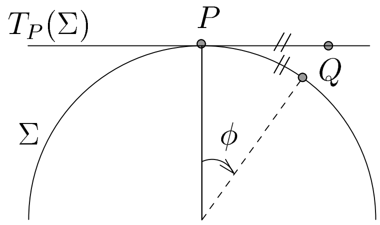
$$\begin{aligned} \tilde{c}(S\boldsymbol{\delta}) &= s^{\alpha}\tilde{c}(\boldsymbol{\delta}) \\ \tilde{c}'(S\boldsymbol{\delta}) &= s^{\alpha-1}\tilde{c}'(\boldsymbol{\delta}) \end{aligned}$$

Soit R le processus obtenu par restriction de $\tilde{R}$ à une sphère Σ. Alors le processus relevé R_P est tangentiellement stationnaire.

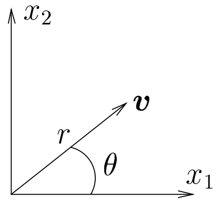
Preuve Soit Σ une sphère de rayon ρ et P un point de Σ de coordon-



(a) Coordonnées sphériques (ϕ, θ) de pôle P.



(b) Le relèvement en P du point Q est éloigné de P d'une distance $r = \rho\phi$, où ρ est le rayon de la sphère.



(c) Coordonnées polaires (r, θ).

FIG. 3.4 – *Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées polaires sur le plan tangent.*

nées $(0,0,\rho)$. Le processus R est défini sur Σ par restriction d'un processus tridimensionnel stationnaire et isotrope $\tilde{R}$:

$$R = \tilde{R}|_{\Sigma} \ .$$

Si $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, la covariance $\tilde{c}$ de $\tilde{R}$ définie par

$$\tilde{c}(\boldsymbol{\delta}) = E\left\{\tilde{R}(x_1, x_2, x_3)\tilde{R}(x_1+\delta_1, x_2+\delta_2, x_3+\delta_3)\right\}$$

est, par hypothèse d'isotropie, une fonction de la norme euclidienne de $\boldsymbol{\delta}$, $\|\boldsymbol{\delta}\| = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}$.

Notre objectif étant de montrer les conditions d'homogénéité (3.12-3.13) sur la covariance tangentielle décentrée c_P du processus R , il nous faut relier c_P à la covariance $\tilde{c}$ du processus $\tilde{R}$. Commençons par établir la relation géométrique entre les points du plan tangent $T_P(\Sigma)$ et leur image par $\exp_P$ sur la sphère Σ. Il est utile pour cela de considérer des coordonnées polaires dans le plan tangent, dont l'angle θ coïncide avec l'angle θ des coordonnées sphériques (Figure 3.4(b)). On a alors, pour $r \leq \pi\rho/2$ et $0 \leq \theta < \pi/2$,

$$\exp_P\left(r\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\rho\sin r/\rho \ \cos\theta \\ \rho\sin r/\rho \ \sin\theta \\ \rho\cos r/\rho\end{pmatrix}$$

Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de $T_P(\Sigma)$ de coordonnées polaires (r,θ) (voir Figure 3.4(c)). Les coordonnées cartésiennes de $\boldsymbol{v}$ dans le plan $T_P(\Sigma)$ et ses coordonnées polaires sont reliées par :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \|\boldsymbol{v}\| \\ \theta &= \arctan(v_2/v_1) \ , \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \cos\theta &= v_1/\|\boldsymbol{v}\| \\ \sin\theta &= v_2/\|\boldsymbol{v}\| \end{aligned}$$

On peut maintenant expliciter la relation

$$c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) = \tilde{c}(\exp_P(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}) - \exp_P(\boldsymbol{v})) \ ,$$

à savoir :

$$c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) = \tilde{c}\left(\rho\begin{pmatrix}\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|} \ \sin\|\boldsymbol{v}\|/\rho \\ \frac{v_2}{\|\boldsymbol{v}\|} \ \sin\|\boldsymbol{v}\|/\rho \\ \cos\|\boldsymbol{v}\|/\rho\end{pmatrix} - \rho\begin{pmatrix}\frac{v_1+\delta_1}{\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|} \ \sin\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|/\rho \\ \frac{v_2+\delta_2}{\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|} \ \sin\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|/\rho \\ \cos\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|/\rho\end{pmatrix}\right) \ .$$

Plus précisément, l'hypothèse d'isotropie sur $\tilde{c}$ implique que

$$c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) = \tilde{c}\left(\|\exp_P(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}) - \exp_P(\boldsymbol{v})\|\right) ,$$

et on en déduit

$$c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) = \tilde{c}\left(\rho\left(2 - 2\frac{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta})}{\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{\delta}\|}\sin\frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\rho}\sin\frac{\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|}{\rho} - 2\cos\frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\rho}\cos\frac{\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|}{\rho}\right)^{1/2}\right) , \tag{3.18}$$

qu l'on peut résumer par

$$c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) = \tilde{c}(f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})) . \tag{3.19}$$

Notons tout d'abord qu'au premier ordre lorsque $s = \|S\| \to 0$, f vérifie

$$f(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) = sf(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) .$$

Donc on peut vérifier sans peine la première relation d'homogénéité (3.12):

$$\begin{aligned} c_P(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) &= \tilde{c}(f(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta})) \\ &= \tilde{c}(sf(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})) \\ &= s^\alpha \tilde{c}(f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})) . \end{aligned}$$

Pour vérifier (3.13), différentions (3.19) par rapport à $\boldsymbol{v}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) = \tilde{c}'(f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}))\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) . \tag{3.20}$$

Donc

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) &= \tilde{c}'(f(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}))\nabla_{\boldsymbol{v}} f(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) && (3.21) \\ &= \tilde{c}'(sf(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}))\nabla_{\boldsymbol{v}} f(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) && (3.22) \\ & && (3.23) \end{aligned}$$

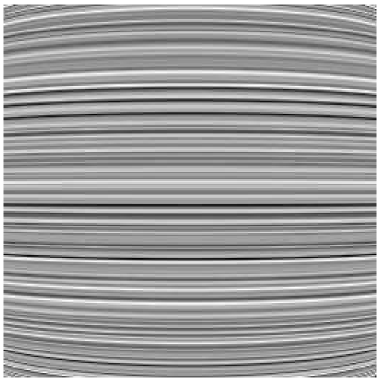
Mais on peut montrer par un développement limité qu'au premier ordre en $s \to 0$,

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) = s^2 \nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})$$

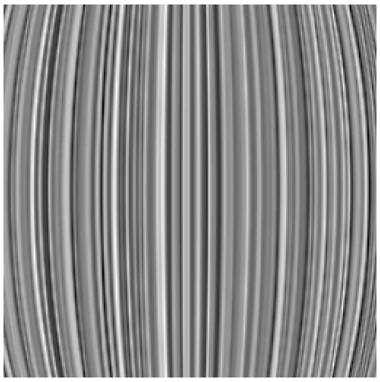
donc

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) &= s^{\alpha-1}\tilde{c}'(f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}))s^2\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) && (3.24) \\ &= s^{\alpha+1}\tilde{c}'(f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}))\nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) && (3.25) \\ &= s^{\alpha+1}\nabla_{\boldsymbol{v}} c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) , && (3.26) \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.13).
□



(a) Texture orientée selon les parallèles



(b) Texture orientée selon les méridiens

FIG. 3.5 – *Deux textures non isotropes sur la sphère.*

3.4.2 Parallèles et méridiens sur la sphère

Définir une texture stationnaire mais non isotrope sur une surface courbe est difficile: il suffit de chercher à en dessiner une sur une orange pour s'en apercevoir... Nous allons nous contenter d'analyser la stationnarité de deux textures particulières sur la sphère: une texture invariante le long des parallèles, et une texture invariante le long des méridiens. On conserve les coordonnées sphériques (θ, ϕ) définies plus haut

Proposition 3.5. *Avec les coordonnées sphériques (θ, ϕ) de la Figure 3.4(a), soit R un processus défini sur la sphère Σ, dont la covariance vérifie*

$$E\{R(P_1)R(P_2)\} = c(\phi_1 - \phi_2) \ . \tag{3.27}$$

ou bien

$$E\{R(P_1)R(P_2)\} = c(\theta_1 - \theta_2) \ . \tag{3.28}$$

Le processus R_P est tangentiellement stationnaire uniquement si P est sur l'équateur, c'est-à-dire si P a pour latitude $\phi_P = \pi/2$.

Preuve Nous commençons par établir des relations géométriques qui seront utiles pour traiter les deux cas (3.27) et (3.28).

Dans le cas de la texture isotrope sur une sphère de la Proposition 3.4, tous les points de la sphère étaient équivalents, donc nous avions choisi de nous placer au pôle nord P_N. Ici par contre, la position du point P par rapport au pôle P_N a une importance.

Dans la démonstration de la Proposition 3.4 on a montré la correspondance grâce à l'application exponentielle entre les coordonnées sphériques de pôle P_N et des coordonnées polaires également centrées au pôle P_N. Dans le cas présent, il faut faire le passage entre des coordonnées polaires centrées en un point P a priori différent du pôle P_N, et les coordonnées sphériques de pôle P_N.

La matrice suivante est la matrice de passage entre des coordonnées sphériques de pôle P, et des coordonnées sphériques de pôle P_N :

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_P \cos\theta_P & -\sin\theta_P & \sin\phi_P \cos\theta_P \\ \cos\phi_P \sin\theta_P & \cos\theta_P & \sin\phi_P \sin\theta_P \\ -\sin\phi_P & 0 & \cos\phi_P \end{pmatrix}$$

On se donne une base orthonormale (x_1, x_2) du plan tangent $T_P(\Sigma)$, telle que x_1 soit orienté dans la direction du méridien, pointant vers le sud, et x_2 dans la direction du parallèle, pointant vers l'est.
Alors, dans les coordonnées sphériques de pôle P,

$$\exp_P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\|v\|} \sin \|v\|/\rho \\ \frac{v_2}{\|v\|} \sin \|v\|/\rho \\ \cos \|v\|/\rho \end{pmatrix}$$

et dans les coordonnées sphériques de pôle P_N, en supposant sans perte de généralité que $\theta_P = 0$,

$$\exp_P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\phi_P \frac{v_1}{\|v\|} \sin \|v\|/\rho + \sin\phi_P \cos \|v\|/\rho \\ \frac{v_2}{\|v\|} \sin \|v\|/\rho \\ -\sin\phi_P \frac{v_1}{\|v\|} \sin \|v\|/\rho + \cos\phi_P \cos \|v\|/\rho \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

A présent nous allons donner l'expression de la covariance tangentielle décentrée dans chacun des deux cas (3.27) et (3.28).
Nous commençons par le cas d'une texture orientée selon les parallèles (3.27) :

$$\begin{aligned} c_P(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta}) =& c(\phi(\exp_P(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\delta})) - \phi(\exp_P(\boldsymbol{v}))) \\ =& c \left(\arccos \left(-\sin\phi_P \frac{v_1 + \delta_1}{\|v\|} \sin \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\delta}\|/\rho + \cos\phi_P \cos \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\delta}\|/\rho \right) - \right. \\ & \left. \arccos \left(-\sin\phi_P \frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|} \sin \|\boldsymbol{v}\|/\rho + \cos\phi_P \cos \|\boldsymbol{v}\|/\rho \right) \right) \ . \end{aligned}$$

On résume cette expression par

$$c_P(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta}) = c(f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta}))\ .$$

On démontre maintenant (3.12-3.13) avec les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition 3.4. Il est clair que f est de l'ordre de s si $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\delta}$ le sont. Donc on vérifie la première condition d'homogénéité (3.12) sans problème.
En différentiant f par rapport à δ_1, δ_2, v_1 et v_2 (calculs effectués sous MAPLE), on voit que

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{O}(s)\nabla_{\boldsymbol{\delta}} f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta})$$

si $\phi_P \neq \pi/2$, et

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} f(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{O}(s^2)\nabla_{\boldsymbol{\delta}} f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta})$$

si $\phi_P = \pi/2$. Le processus R_P est donc tangentiellement stationnaire uniquement l'équateur.

Dans le cas d'une texture orientée selon les méridiens (3.28), il faut exprimer l'angle θ des coordonnées sphériques et non plus l'angle ϕ, en fonction des coordonnées dans le plan tangent. Le vecteur du second membre de (3.29) est représenté dans les coordonnées sphériques de pôle P_N habituelles, donc en divisant la deuxième coordonnée par la première, on obtient la tangente de l'angle θ, soit :

$$\begin{aligned}\tan\theta =& \frac{\frac{v_2}{\|\boldsymbol{v}\|}\sin\|\boldsymbol{v}\|/\rho}{\cos\phi_P\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|}\sin\|\boldsymbol{v}\|/\rho + \sin\phi_P\cos\|\boldsymbol{v}\|/\rho}\\ =& \frac{\frac{v_2}{\|\boldsymbol{v}\|}\tan\|v\|/\rho}{\cos\phi_P\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|}\tan\|\boldsymbol{v}\|/\rho + \sin\phi_P}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}c_P(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta}) =& c\left(\arctan\left(\frac{\frac{v_2+\delta_2}{\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|}\tan\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\delta}\|/\rho}{\cos\phi_P\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|}\tan\|\boldsymbol{v}\|/\rho + \sin\phi_P}\right) - \right.\\ & \left.\arctan\left(\frac{\frac{v_2}{\|\boldsymbol{v}\|}\tan\|\boldsymbol{v}\|/\rho}{\cos\phi_P\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|}\tan\|\boldsymbol{v}\|/\rho + \sin\phi_P}\right)\right)\end{aligned}$$

que l'on résume par

$$c_P(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta}) = c(g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta}))\ .$$

On voit clairement que si $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\delta}$ sont d'ordre s, $g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta})$ est également d'ordre s. En différentiant g par rapport à δ_1, δ_2, v_1 et v_2 (calculs effectués sous MAPLE), on obtient comme pour f ci-dessus :

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} g(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{O}(s)\nabla_{\boldsymbol{\delta}} g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\delta})$$

si $\phi_p \neq \pi/2$, et

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} g(S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{O}(s^2)\nabla_{\boldsymbol{\delta}} g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\delta})$$

si $\phi_P = \pi/2$, ce qui permet de conclure à la stationnarité tangentielle de R_P uniquement sur l'équateur.

□

Remarque 3.2. *Bien que rien ne soit encore démontré de manière rigoureuse à ce sujet, nous pensons que les parallèles ne satisfont pas la condition de stationnarité tangentielle en dehors de l'équateur parce que ce ne sont pas des géodésiques, et que les méridiens ne satisfont pas la condition en dehors de l'équateur parce qu'ils ne sont pas parallèles. On peut remarquer que les textures synthétiques non isotropes sur des surfaces courbes qui ont été produites par V. Interrante [39] s'efforcent de respecter simultanément les deux propriétés : elles se propagent localement le long de géodésiques, tout en maintenant un certain parallélisme.*

3.4.3 Vers d'autres types de stationnarité

Le fait que les textures orientées selon les méridiens ou les parallèles ne soient pas tangentiellement stationnaires en dehors de l'équateur empêche a priori l'utilisation d'algorithmes de *Shape from Texture* pour ce type de surfaces texturées. Pourtant, l'aspect sphérique de telles surfaces est visible dans les images de la Figure 3.5. Les textures orientées selon les méridiens ou les parallèles satisfont à un type de stationnarité plus générale encore que la stationnarité tangentielle, que l'on pourrait qualifier de *paramétrique* : les expressions (3.27-3.28) reflètent en effet une stationnarité de la texture lorsqu'on se place dans le système de coordonnées sphériques.

Plus généralement, étant donné une surface texturée de manière stationnaire dans un système de coordonnées adaptées, la théorie des processus localement dilatés que nous avons développée permet d'estimer les variations relatives d'une matrice Jacobienne correspondant à un changement de métrique entre le développement de la surface selon le système de coordonnées adaptées, et l'image. Une étape géométrique est ensuite nécessaire pour relier les variations de la matrice Jacobienne à la forme de la surface.

Chapitre 4

Estimation

Le Chapitre 2 a montré que la variance des coefficients d'ondelettes d'un processus localement dilaté $F(x) = R(d(x))$,

$$w(u,s) = E\left\{|\langle F, \psi_{u,s}\rangle|^2\right\} = \langle K_F \psi_{u,s}, \psi_{u,s}\rangle \ ,$$

satisfait à une équation de transport à petite échelle $s \to 0$:

$$(1 + \mathcal{O}(s))\frac{\partial}{\partial u}w(u,s) - \frac{d''(u)}{d'(u)}\frac{\partial}{\partial \log s}w(u,s) = 0 \ .$$

La connaissance des dérivées partielles de $w(u,s)$ à petite échelle permet ainsi l'estimation de la dilatation locale $d(x)$. On est donc face à un problème d'estimation de la covariance de F.

L'estimation de la covariance lorsqu'on dispose de plusieurs réalisations d'un processus est possible par une moyenne statistique sur les réalisations, en appliquant le théorème de la limite centrale. Lorsqu'on ne dispose que d'une seule réalisation, le problème est plus difficile, mais il a une solution si le processus est ergodique.

Pour un processus ergodique, la loi des grands nombres s'applique pour les moyennes spatiales au même titre que pour les moyennes statistiques : on peut alors estimer la covariance à partir de moyennes spatiales sur le signal. Par exemple, un processus qui est stationnaire et qui a une décorrélation spatiale suffisante est ergodique (voir Yaglom [73]). En effet, la stationnarité implique l'équivalence statistique de toutes les positions sur lesquelles on moyenne, et la décorrélation assure que les moyennes spatiales annulent les fluctuations statistiques.

Lorsqu'on n'a pas de stationnarité, comme c'est le cas pour les processus localement dilatés, une solution consiste à faire une moyenne non plus sur tout l'espace, mais localisée autour d'une position que l'on peut ensuite faire varier.

Pour pouvoir montrer l'ergodicité de ces estimateurs, il est comme toujours nécessaire d'avoir une bonne décorrélation spatiale. Cette décorrélation est possible si d'une part le processus stationnaire lui-même est décorrélé, et si d'autre part la dilatation locale ne vient pas altérer cette propriété.
Les ondelettes ont une importance cruciale dans l'étude de cette décorrélation, qui se manifeste dans les deux aspects ci-dessus. Premièrement, la transformée en ondelettes a tendance à décorréler les processus, comme on peut le voir pour le mouvement brownien fractionnaire.
Deuxièmement, l'opérateur de dilatation locale est bien comprimé en ondelettes. Ceci garantit que la décorrélation du processus stationnaire se conserve après dilatation locale. Il est important de noter que ce sont les moments nuls des ondelettes qui font fonctionner ces deux points.

Plan du Chapitre Nous commençons par l'étude du problème d'estimation statistique en une dimension. Dans la section 4.1, nous introduisons la moyenne glissante et les estimateurs qui lui sont associés. La section 4.2 est consacrée à la décorrélation des coefficients d'ondelettes des processus localement dilatés. Puis l'ergodicité est traitée dans la section 4.3 où nous démontrons la consistance des estimateurs. Enfin, la section 4.4 introduit les estimateurs en deux dimensions, et montre comment les résultats statistiques peuvent s'étendre.

4.1 Moyenne glissante

Le signal qui est une réalisation du processus localement dilaté $F(x)$ se présente sous une forme échantillonnée, avec N points d'échantillonnage représentant des valeurs discrètes k/N, pour $k \in \{1, \ldots, N\}$. La transformée en ondelettes est définie pour des positions discrètes de la forme $u = k/N$, avec $1 \leq k \leq N$. Pour une échelle s donnée, nous avons à notre disposition une réalisation du processus $\left|\langle F, \psi_{\frac{k}{N},s}\rangle\right|^2$ pour des valeurs de k entre 1 et N. On choisit de moyenner l'équation de transport sur un sous-intervalle de $[0,1]$

centré en u_0, de longueur Δ. On introduit :

$$\overline{\partial_u w}(u_0,s) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{|k/N-u_0|\le\Delta/2} \frac{\partial}{\partial u} w(k/N,s) \ , \tag{4.1}$$

$$\overline{\partial_{\log s} w}(u_0,s) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{|k/N-u_0|\le\Delta/2} \frac{\partial}{\partial \log s} w(k/N,s) \ . \tag{4.2}$$

Si la dérivée seconde de $(\log(d'))$ est bornée sur $[0,1]$, alors pour tout $|k/N - u_0| \le \Delta/2$,

$$\left| \frac{d''(k/N)}{d'(k/N)} - \frac{d''(u_0)}{d'(u_0)} \right| = \mathcal{O}(\Delta) \ .$$

Donc l'équation de transport (2.49) moyennée sur un intervalle de taille Δ autour de u_0 devient :

$$\overline{\partial_u w}(u_0,s)(1+\mathcal{O}(s)) - [d''(u_0)/d'(u_0) + \mathcal{O}(\Delta)]\overline{\partial_{\log s} w}(u_0,s) = 0 \ . \tag{4.3}$$

Il est judicieux de choisir un intervalle de la forme $\Delta = N^{-\delta}$ avec $0 < \delta < 1$, pour deux raisons :

1. La longueur de l'intervalle sur lequel on moyenne décroît ainsi vers 0 lorsque $N \to \infty$, ce qui fait tendre le terme de biais $\mathcal{O}(\Delta)$ vers zéro. Autrement dit, $d''(u_0)/d'(u_0)$ est approché avec une meilleure résolution.
2. Le nombre de coefficients d'ondelettes dont la position est dans un intervalle de taille Δ est donné par $N\Delta$. Comme $N\Delta \to \infty$ avec N, on pourra montrer que la variance des estimateurs tend vers 0 quand $N \to \infty$ (Proposition 4.2).

On se trouve ici face à un classique compromis entre le biais et la variance qui sera à nouveau abordé dans la section 4.3.

L'équation de transport moyennée (4.3) peut s'écrire :

$$\frac{d''(u_0)}{d'(u_0)} = \frac{\overline{\partial_u w}(u_0,s)}{\overline{\partial_{\log s} w}(u_0,s)}(1+\mathcal{O}(s)) + \mathcal{O}(\Delta)$$

Il est naturel de choisir l'échelle s la plus petite possible, soit s de l'ordre de $1/N$. Puisque $\Delta = N^{-\delta}$ avec $0 < \delta < 1$, $\mathcal{O}(N^{-1}) < \mathcal{O}(\Delta)$, donc lorsque N est grand

$$\frac{d''(u_0)}{d'(u_0)} = \frac{\overline{\partial_u w}(u_0,s)}{\overline{\partial_{\log s} w}(u_0,s)} + \mathcal{O}(\Delta) \ . \tag{4.4}$$

L'estimation de $d''(u_0)/d'(u_0)$ à partir de l'équation de transport moyennée (4.3) nécessite l'estimation de $\overline{\partial_u w}(u_0, s)$ et de $\overline{\partial_{\log s} w}(u_0, s)$: nous allons donc introduire leurs estimateurs respectifs $\widehat{\partial_u w}(u_0, s)$ et $\widehat{\partial_{\log s} w}(u_0, s)$, et estimer $\frac{d''(u_0)}{d'(u_0)}$ par

$$\frac{\widehat{\partial_u w}(u_0, s)}{\widehat{\partial_{\log s} w}(u_0, s)} .$$

Avant de donner les expressions des estimateurs $\widehat{\partial_u w}(u_0, s)$ et $\widehat{\partial_{\log s} w}(u_0, s)$, nous montrons que les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial u} w(k/N, s), \text{ et } \frac{\partial}{\partial \log s} w(k/N, s)$$

qui interviennent dans les expressions (4.1-4.2) s'expriment de façon très simple grâce à la transformée en ondelettes.

4.1.1 Ondelettes et dérivation

L'expression des dérivées partielles

$$\frac{\partial w}{\partial \mathrm{x}}(u, s) \tag{4.5}$$

(où la variable x représente $\log s$ ou u) est très voisine de celle de $w(u, s)$. Nous montrons dans ce paragraphe que ces dérivées partielles peuvent se voir à leur tour comme des transformées en ondelettes de la covariance du processus F, mais avec des fonctions d'ondelettes qui sont des variantes de celles utilisées pour $w(u, s)$.
Comme

$$w(u, s) = E\left\{|\langle F, \psi_{u,s}\rangle|^2\right\} ,$$

il est clair par linéarité de l'espérance et du produit scalaire, que

$$\frac{\partial w}{\partial \mathrm{x}}(u, s) = 2Re\left[E\left\{\langle F, \psi_{u,s}\rangle \langle F, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\psi_{u,s})\rangle^*\right\}\right] .$$

La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(\psi_{u,s})$ peut s'écrire sous la forme d'une autre ondelette $\tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{u,s}$, dont l'expression exacte varie selon que $\mathrm{x} = u$ ou $\mathrm{x} = \log s$. Le point important est que des dérivées partielles telles que (4.5) s'obtiennent de manière rapide et précise par transformée en ondelettes, avec une ondelette-mère différente :

$$\frac{\partial w}{\partial \mathrm{x}}(u, s) = 2Re\left[E\left\{\langle F, \psi_{u,s}\rangle \langle F, \tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{u,s}\rangle^*\right\}\right] . \tag{4.6}$$

Nous détaillons maintenant successivement les deux cas $\mathrm{x} = u$ et $\mathrm{x} = \log s$.

Dérivée par rapport à la position

La dérivée par rapport à u de

$$\langle F, \psi_{u,s} \rangle = \int F(x) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{x-u}{s} \right) dx \tag{4.7}$$

est

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \langle F, \psi_{u,s} \rangle &= -\frac{1}{s} \int F(x) \frac{1}{s} \psi_s^{*\prime} \left(\frac{x-u}{s} \right) dx \\ &= -\frac{1}{s} \langle F, \psi'_{u,s} \rangle \ . \end{aligned}$$

La transformée en ondelettes avec l'ondelette dérivée ψ' peut s'implémenter par transformée de Fourier (section 5.2) : il suffit alors de remplacer la transformée de Fourier $\hat{\psi}(\omega)$ de ψ par celle de ψ', qui est $i\omega\hat{\psi}(\omega)$.

Dérivée par rapport à la dilatation

La dérivée par rapport à $\log s$ de (4.7) est

$$\begin{aligned} s \frac{d}{ds} \langle F, \psi_{u,s} \rangle &= -\int F(x) \frac{1}{s} \left[\psi^* \left(\frac{x-u}{s} \right) + \frac{x-u}{s} \psi^{*\prime} \left(\frac{x-u}{s} \right) \right] dx \\ &= \langle F, \tilde{\psi}_{u,s} \rangle \end{aligned}$$

où $\tilde{\psi}(x) = -\psi(x) - x\psi'(x)$. La transformée de Fourier de $\tilde{\psi}(x)$ est $\omega\hat{\psi}'(\omega)$, ce qui rend très simple l'implémentation de $s\frac{d}{ds}\langle F, \psi_{u,s} \rangle$ (section 5.2).

4.1.2 Estimateurs

Si l'on remplace (4.6) dans (4.1), on obtient une expression pour la moyenne de la dérivée partielle $\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(u_0, s)$ qui fait intervenir l'ondelette modifiée $\tilde{\psi}^{\mathrm{x}}$:

$$\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(u_0, s) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{|k/N - u_0| \leq \Delta/2} Re \left[E \left\{ \langle F, \psi_{\frac{k}{N}, s} \rangle \langle F, \tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{\frac{k}{N}, s} \rangle^* \right\} \right] \ .$$

Soit $j_0 < 0$ tel que $s = 2^{j_0}$, et soit $k_0 = 2^{|j_0|} u_0$. On renomme

$$\begin{aligned} \psi_{j,k} &= \psi_{2^j k, 2^j} \\ \overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(j_0, k_0) &= \overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(u_0, s) \ . \end{aligned}$$

Puisque $\Delta = N^{-\delta}$ et $N = 2^{|j_0|}$, on a $N\Delta = 2^{|j_0|(1-\delta)}$, et donc

$$\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(j_0, k_0) = \frac{2}{2^{|j_0|(1-\delta)}} \sum_{|k-k_0| \leq 2^{|j_0|(1-\delta)}/2} Re\left[E\left\{\langle F, \psi_{j_0,k}\rangle \langle F, \tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{j_0,k}\rangle^*\right\}\right] . \quad (4.8)$$

Il est naturel de choisir comme estimateur de $\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(j_0, k_0)$:

$$\widehat{\partial_{\mathrm{x}} w}(j_0, k_0) = \frac{2}{2^{|j_0|(1-\delta)}} \sum_{|k-k_0| \leq 2^{|j_0|(1-\delta)}/2} Re\left[\langle F, \psi_{j_0,k}\rangle \langle F, \tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{j_0,k}\rangle^*\right] . \quad (4.9)$$

4.2 Décorrélation spatiale

Nous montrons dans cette section un résultat qui sera essentiel dans l'étude de la convergence des estimateurs (4.9) dans la section 4.3 : que pour une échelle j_0 fixée, les $\langle F, \psi_{j_0,k}\rangle$ sont bien décorrélés, c'est-à-dire que

$$E\left\{\langle F, \psi_{j_0,k_1}\rangle \langle F, \psi_{j_0,k_2}\rangle^*\right\}$$

décroît lorsque $|k_1 - k_2|$ augmente. Puisque $F = DR$, ceci équivaut à montrer que

$$E\left\{\langle R, D^*\psi_{j_0,k_1}\rangle \langle R, D^*\psi_{j_0,k_2}\rangle^*\right\}$$

décroît lorsque $|k_1 - k_2|$ augmente. Pour cela, nous allons au préalable faire une hypothèse de décorrélation (4.24) sur les coefficients d'ondelettes du processus R, et démontrer un résultat de migration des ondelettes par dilatation locale (Théorème 4.1). Grâce à cette migration, la décorrélation des coefficients d'ondelettes de F peut se déduire de celle des coefficients d'ondelettes de R (Théorème 4.2), dès lors que les ondelettes forment une *frame*. Nous commençons donc cette section par un rappel sur les frames et leur formule de reconstruction.

4.2.1 Frame et formule de reconstruction

La famille de fonctions $(\psi_{j,k})$ est une frame, si la norme de $L^2(\mathbb{R})$ est équivalente à la norme

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2\right) .$$

Ceci revient à dire qu'il existe deux constantes strictement positives A et B telles que pour tout f de $L^2(\mathbb{R})$,

$$A \, \|f\|^2 \leq \sum |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \leq B \, \|f\|^2 .$$

On peut alors définir la frame duale $(\overline{\psi}_{j,k})$ à $(\psi_{j,k})$, qui permet d'écrire la formule de reconstruction suivante :

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \overline{\psi}_{j,k} \ .$$

La Proposition ci-dessous donne des conditions suffisantes sur l'ondelette ψ afin que si $\psi_{j,k}$ forme une frame, ce soit aussi le cas pour $\tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{j,k}$, avec $\mathrm{x} = u$ ou $\log s$.

Proposition 4.1. *Soit $\psi_{j,k} = T_{(2^j k, 2^j)}\psi$ une frame, et $\overline{\psi}_{j,k} = T_{(2^j k, 2^j)}\overline{\psi}$ sa frame duale. Si les transformées de Fourier $\hat{\psi}$ et $\hat{\overline{\psi}}$ ont une décroissance suffisamment rapide en zéro et à l'infini, à savoir*

$$\begin{array}{lll} |\hat{\psi}(\omega)| & \leq \frac{C}{(1+|\omega|)^s} & \textit{pour un } s > 3/2 \\ |\hat{\overline{\psi}}(\omega)| & \leq C'|\omega|^\alpha & \textit{pour un } \alpha > 1 \end{array}$$

alors les familles de fonctions $\tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{j,k} = T_{(2^j k, 2^j)}\psi^{\mathrm{x}}$, où $\mathrm{x} = u$ ou $\mathrm{x} = \log s$, forment deux frames.

Preuve Les hypothèses de décroissance assurent que la famille de fonctions $\tilde{\psi}^u_{j,k}$, construite à partir de l'ondelette dérivée est une frame, comme le montre Bernard [10]. Ces hypothèses assurent a fortiori que $\tilde{\psi}^{\log s}_{j,k}$ est une frame.
□

Il existe donc des frames duales $(\overline{\tilde{\psi}^{\mathrm{x}}}_{j,k})$, et une formule de reconstruction.

4.2.2 Migration des ondelettes

Sous les hypothèses de la Proposition 4.1, les trois fonctions d'ondelettes ψ, $\tilde{\psi}^u$ et $\tilde{\psi}^{\log s}$ génèrent des frames par translation et dilatation. Dans toute la suite de cette section, les hypothèses de décorrélation, ainsi que les résultats de migration et de décorrélation, énoncés pour les ondelettes $\psi_{j,k}$ s'énoncent également pour les deux autres types d'ondelettes.

On montre dans le Théorème 4.1 ci-dessous qu'une ondelette qui a des moments nuls se transforme par dilatation locale en une fonction qui est très proche d'une autre ondelette. La démonstration de ce résultat consiste à estimer des produits scalaires de la forme

$$\langle D\psi_{u,s}, \psi_{u',s'} \rangle \ .$$

Si $s'd'(u')$ est plus petit que s, on fait jouer par $D\psi_{u,s}$ le rôle d'une fonction presque constante, dont le produit scalaire avec l'ondelette $\psi_{u',s'}$ est d'autant plus petit que cette dernière a de nombreux moments nuls.

Théorème 4.1 (Migration des ondelettes par dilatation locale). *Si l'ondelette ψ a P moments nuls, alors il existe des constantes A_P, A'_P, B_P et B'_P telles que*

$$\begin{aligned}
|\langle D\psi_{u,s}, \psi_{u',s'}\rangle| \leq & \frac{A_P}{(ss')^{1/2}} \left(\frac{s'd'(u')}{s}\right)^{P+1/2} && (4.10)\\
\leq & \frac{A'_P}{(ss')^{1/2}} \left(\frac{s}{s'd'(d^{-1}(u))}\right)^{P+1/2} && (4.11)\\
|\langle D\psi_{u,s}, \phi_{u',s'}\rangle| \leq & \frac{B_P}{(ss')^{1/2}} \left(\frac{s'd'(u')}{s}\right)^{P+1/2} && (4.12)\\
|\langle D\phi_{u,s}, \phi_{u',s'}\rangle| \leq & \frac{B'_P}{(ss')^{1/2}} \left(\frac{s}{s'd'(d^{-1}(u))}\right)^{P+1/2} && (4.13)
\end{aligned}$$

Soit $I_d(s,s',u') = [d(u'-s'a)) - sa, d(u'+s'a)) + sa]$:
si $u \notin I_d(s,s',u')$ ou $u' \notin I_{d^{-1}}(s',s,u)$,

$$|\langle D\psi_{u,s}, \psi_{u',s'}\rangle| = |\langle D\psi_{u,s}, \phi_{u',s'}\rangle| = |\langle D\phi_{u,s}, \phi_{u',s'}\rangle| = 0 \ . \qquad (4.14)$$

Preuve Le produit scalaire de l'ondelette localement dilatée $D\psi_{u,s}$ avec l'ondelette $\psi_{u',s'}$ est

$$\langle D\psi_{u,s}, \psi_{u',s'}\rangle = \frac{1}{ss'} \int \psi\left(\frac{d(x)-u}{s}\right) \psi\left(\frac{x-u'}{s'}\right) \, dx \ . \qquad (4.15)$$

Nous allons considérer deux cas pour l'étude de cette expression, selon les valeurs relatives des échelles s et s'.

- Si $d'(x)/s \ll 1/s'$, alors $\psi(\frac{d(x)-u}{s})$ est pratiquement constant sur le support de $\psi_{u',s'}$. Mais comme $d'(x) \approx d'(u')$ sur le support de $\psi_{u',s'}$, les variations de $\psi(\frac{d(x)-u}{s})$ sont négligeables devant celles de $\psi(\frac{x-u'}{s'})$ lorsque
$$s' \ll \frac{s}{d'(u')};$$
- De façon symétrique, sur le support de $\psi(\frac{d(x)-u}{s})$, les variations de $\psi(\frac{x-u'}{s'})$ sont négligeables devant celles de $\psi(\frac{d(x)-u}{s})$ lorsque
$$s \ll d'(d^{-1}(u))s'.$$

En conclusion, lorsque $s < d'(d^{-1}(u))s'$, on peut faire le changement de variable $x' = \frac{d(x)-u}{s}$ dans (4.15) :

$$\langle D\psi_{u,s}, \psi_{u',s'}\rangle = \frac{1}{s'}\int \psi(x')\frac{1}{d'(d^{-1}(u+sx'))}\psi^*\left(\frac{d^{-1}(u+sx')-u'}{s'}\right)dx' \quad (4.16)$$

En introduisant une primitive Ψ de ψ, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{d'(d^{-1}(u+sx))}\psi^*\left(\frac{d^{-1}(u+sx)-u'}{s'}\right) =& \frac{d}{dx}\left(\Psi\left(\frac{d^{-1}(u+sx)-u'}{s'}\right)\right)\\ =& \frac{d}{dx}\left(\Psi(\delta_{d^{-1},u,u',s,s'}(x))\right) \quad (4.17)\end{aligned}$$

avec

$$\delta_{d^{-1},u,u',s,s'}(x) = \frac{d^{-1}(u+sx)-u'}{s'} .$$

donc en remplaçant (4.17) dans (4.16), on obtient

$$\langle D\psi_{u,s}, \psi_{u',s'}\rangle = \frac{1}{s'}\int \psi(x)\frac{d}{dx}\left(\Psi(\delta_{d^{-1},u,u',s,s'}(x))\right)dx \quad (4.18)$$

La fonction $\frac{d}{dx}\left(\Psi(\delta_{d^{-1},u,u',s,s'}(x))\right)$ est une fonction à variation lente que l'on intègre contre la fonction oscillante $\psi(x)$.
Par contre, lorsque $s' < \frac{s}{d'(u')}$, on effectue le changement de variables $x' = \frac{x-u'}{s'}$ dans (4.15) :

$$\begin{aligned}\langle D\psi_{u,s}, \psi_{u',s'}\rangle =& \sqrt{s'/s}\int \psi\left(\frac{d(u'+s'x')-u}{s}\right)\psi^*(x')dx'\\ =& \frac{1}{s}\int \psi(\delta_{d,u',u,s',s}(x))\psi^*(x)dx \quad (4.19)\end{aligned}$$

Ici, $\psi(\delta_{d,u',u,s',s}(x))$ est une fonction à variation lente que l'on intègre contre la fonction oscillante $\psi^*(x)$.
On peut traiter les produits scalaires $\langle D\psi_{u,s}, \phi_{u',s'}\rangle$ et $\langle D\phi_{u,s}, \phi_{u',s'}\rangle$ de façon similaire, en faisant jouer le rôle de la fonction oscillante à ψ, puisque ϕ n'a pas de moment nul. Si Ψ est une primitive de ϕ, on a

$$\langle D\psi_{u,s}, \phi_{u',s'}\rangle = \frac{1}{s'}\int \psi(x)\frac{d}{dx}\left(\Phi(\delta_{d^{-1},u,u',s,s'}(x))\right)dx \quad (4.20)$$

$$\langle D\phi_{u,s}, \phi_{u',s'}\rangle = \frac{1}{s}\int \phi(\delta_{d,u',u,s',s}(x))\psi^*(x)dx \quad (4.21)$$

Il nous reste donc à estimer les intégrales (4.18- 4.21), en tenant compte du fait que ψ a P moments nuls. Comme le produit scalaire de ψ avec tout polynôme de degré inférieur à P est nul, un développement de Taylor à l'ordre P montre que

$$\left| \int f(x)\psi(x)\ dx \right| \leq C \sup_{Supp(\psi)} \left| \frac{d^P}{dx^P} f \right| \tag{4.22}$$

où la constante C dépend de ψ et de P.
Pour pouvoir appliquer ce résultat, il nous reste à estimer la dérivée d'ordre P des quatre fonctions suivantes :

$$\psi \circ \delta_{d,u',u,s',s},\ \ \phi \circ \delta_{d,u',u,s',s},\ \ \frac{d}{dx}\Psi \circ \delta_{d^{-1},u,u',s,s'} \text{ et } \frac{d}{dx}\Phi \circ \delta_{d^{-1},u,u',s,s'}\ .$$

On applique à chacune de ces quatre fonctions le Lemme suivant, qui se démontre facilement par récurrence sur P :

Lemme 4.1. *On note $\alpha \cdot \beta = \sum_i \alpha_i \beta_i$ le produit scalaire entre deux suites d'entiers naturels. Il existe des constantes $C(\alpha,\beta)$ et des constantes $k(\alpha,\beta) \leq P$ telles que*

$$\frac{d^P}{dx^P}\left(\psi \circ g(x)\right) = \sum_{\alpha\cdot\beta=P} C(\alpha,\beta)\psi^{(k(\alpha,\beta))}(g(x)) \prod_i \left[\frac{d}{dx^{\alpha_i}}\left(g(x)\right)\right]^{\beta_i} \tag{4.23}$$

On applique d'abord le Lemme à $\psi \circ \delta_{d,u',u,s',s}$.
Lorsque $\alpha \cdot \beta = P$,

$$\prod_i \left[\frac{d}{dx^{\alpha_i}}\left(\delta_{d,u',u,s',s}(x)\right)\right]^{\beta_i} = \left(\frac{s'd'(u+s't)}{s}\right)^P\ .$$

Au premier ordre lorsque $s' \to 0$,

$$\left(\frac{s'd'(u+s't)}{s}\right)^P \sim \left(\frac{s'd'(u)}{s}\right)^P\ ,$$

donc grâce au Lemme 4.1, il existe une constante C_P dépendant de P et de ψ, telle qu'au premier ordre lorsque $s' \to 0$,

$$\frac{d^P}{dx^P}\left(\psi \circ \delta_{d,u',u,s',s}(x)\right) \sim C_P \left(\frac{s'd'(u)}{s}\right)^P\ .$$

En remplaçant cette estimation dans (4.22), où $\psi \circ \delta_{d,u',u,s',s}$ joue le rôle de f, on voit que

$$\left| \int \psi(\delta_{d,u',u,s',s}(x))\psi(x)\ dx \right| \leq C\ \left(\frac{s'd'(u)}{s}\right)^P\ ,$$

puis grâce à (4.19),

$$
\begin{aligned}
|\langle D\psi_{u,s}, \psi_{u',s'}\rangle| \leq & \frac{C}{s} \left(\frac{s'd'(u)}{s}\right)^{P} \\
\leq & \frac{A_P}{(ss')^{1/2}} \left(\frac{s'd'(u)}{s}\right)^{P+1/2}
\end{aligned}
$$

car $d'(u)$ est bornée inférieurement par une constante positive η. On a donc montré (4.10).
En appliquant le Lemme 4.1 aux trois autres fonctions

$$
\phi \circ \delta_{d,u',u,s',s}, \ \frac{d}{dx}\Psi \circ \delta_{d^{-1},u,u',s,s'} \text{ et } \frac{d}{dx}\Phi \circ \delta_{d^{-1},u,u',s,s'} \ ,
$$

on montre (4.11), (4.12) et (4.13) avec exactement les mêmes arguments.
Pour montrer (4.14), il suffit de considérer les supports des deux fonctions dans l'intégrale (4.16) : pour que cette intégrale ne soit pas nulle, il faut que

$$
\begin{array}{ccc}
-a & \leq x' & \leq a \\
-a & \leq \frac{d^{-1}(u+sx')-u'}{s'} & \leq a
\end{array}
$$

ce qui implique que

$$
d^{-1}(u-sa) - s'a \leq u' \leq d^{-1}(u+sa) + s'a \ ,
$$

i.e.

$$
u' \in I_{d^{-1}}(s', s, u) \ .
$$

Les autres conditions de (4.14) se montrent de la même façon.
□

Remarque 4.1. *Ce résultat de migration justifie pleinement le choix des ondelettes pour l'étude des processus localement dilatés. Il est important de noter que d'autres transformations, comme la transformée de Fourier à fenêtre (Gabor [30]), ou la transformée en cosinus locales (Coifman, Meyer [22]) ne jouissent pas d'une telle propriété de migration par dilatation locale. Illustrons ceci pour la transformée de Fourier à fenêtre : considérons une exponentielle complexe de fréquence $\xi_j = j\xi_1$, que l'on localise en espace grâce à une fenêtre régulière g_k à support compact dans $[k, k+1]$:*

$$
f_{j,k}(x) = g_k(x) \exp(i\xi_j x) \ .
$$

Si l'on transforme cette fonction par dilatation locale, on obtient

$$f_{j,k}(d(x)) = g_k(d(x)) \exp(i\xi_j d(x)) \ .$$

La fonction $g_k(d(x))$ *n'oscille pas, donc la fréquence instantanée de* $f_{j,k}(d(x))$ *est* $\xi_j d'(x)$*, qui varie d'un facteur* $\xi_j d'(k+1)/d'(k)$ *entre* k *et* $k+1$*. Si* d' *varie sur l'intervalle* $[k, k+1]$*, La fonction localement dilatée* $f_{j,k}(d(x))$ *est corrélée avec un nombre de fonctions* $(f_{j',k'})_{j',k'}$ *proportionnel à* ξ_j*, ce qui pose problème à haute fréquence (Figure 4.1). Ce problème vient du fait que, contrairement aux ondelettes, les fonctions* $f_{j,k}$ *ne sont pas dilatées les unes par rapport aux autres. Certains travaux (Bajcsy and Lieberman [5], Malik*

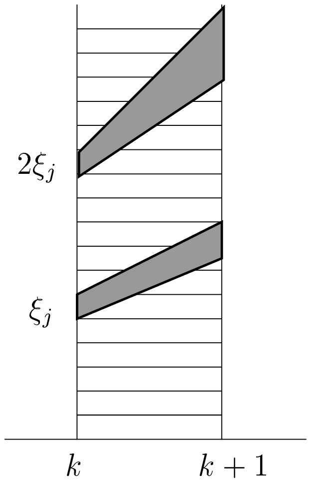


FIG. 4.1 – *Supposons que* $d(k) = k$ *et* $d'(k) = 1$*. Le support spatio-fréquentiel de la fonction dilatée* $f_{j,k}(d(x))$ *est représenté en gris, en dessous de celui de* $f_{2j,k}(d(x))$*. On voit que le nombre de fonctions* $(f_{j',k})_{j'}$ *avec lesquelles* $f_{j,k}(d(x))$ *est corrélé augmente linéairement avec* j*.*

and Rosenholtz [45]) utilisent la transformée de Fourier à fenêtre pour analyser les variations d'une texture, mais les coefficients de Fourier ne migrant pas par dilatation locale, nous leur préférons les warplets pour analyser des textures localement dilatées.

Remarque 4.2. *Le Théorème 4.1 de migration par dilatation locale permet de montrer un résultat qui sort du cadre de cette étude statistique, et c'est pourquoi nous ne le détaillons pas davantage : on peut montrer que l'opérateur de dilatation* D *est comprimé dans une base d'ondelettes. Soit l'opérateur* D^K *obtenu en ne conservant dans la représentation en ondelettes de* D *que les* *coefficients d'ondelettes tels que*

$$\begin{aligned} |j' - j + \log d'(2^{j'}k')| &\leq K \\ |\frac{d(2^{j'}k') - 2^j k}{2^j}| &\leq K \end{aligned}$$

alors en appliquant le Lemme de Schur (Meyer [53]), on montre l'existence d'une constante A_K telle que que la norme de l'opérateur $D - D^K$ dans $L^2(\mathbb{R})$ satisfait

$$\|D - D^K\|_2 \leq \frac{1}{A_K 2^{K\frac{P}{2}}} \ ,$$

où P est le nombre de moments nuls des ondelettes.

4.2.3 Décorrélation du processus localement dilaté

Afin de montrer que les $\langle F, \psi_{j,k}\rangle$ se décorrèlent rapidement en espace, nous faisons une hypothèse de décorrélation rapide sur le processus $\langle R, \psi_{j,k}\rangle$.

Hypothèse de décorrélation du processus stationnaire
On suppose que lorsque $j \to -\infty$ et $j' \to -\infty$,

$$|\langle K_R \psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle| \leq C \frac{\sup\left(\langle K_R \psi_{j,0}, \psi_{j,0}\rangle, \langle K_R \psi_{j',0}, \psi_{j',0}\rangle\right)}{1 + \frac{|2^j k - 2^{j'}k'|}{\max(2^j, 2^{j'})}} \tag{4.24}$$

On prend également pour hypothèse que lorsque $j \to -\infty$,

$$\langle K_R \psi_{j,k}, \psi_{j,k}\rangle \sim 2^{\alpha |j|} \ , \tag{4.25}$$

où α peut être soit positif, soit négatif.

Remarque 4.3. *L'hypothèse (4.24) est une hypothèse de décorrélation spatiale de la transformée en ondelettes. Le processus R étant stationnaire, et les ondelettes $\psi_{j,k}$ et $\psi_{j',k'}$ étant localisées respectivement en $2^j k$ et $2^{j'}k'$, à j et j' fixés,*

$$|\langle K_R \psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle| = E\left\{\langle R, \psi_{j,k}\rangle \langle R, \psi_{j',k'}\rangle^*\right\}$$

est une fonction de $|2^j k - 2^{j'}k'|$, dont l'hypothèse (4.24) impose qu'elle décroisse en $\frac{1}{|2^j k - 2^{j'}k'|}$. Cette hypothèse n'est pas très restrictive : pour un mouvement brownien frationnaire d'exposant H, par exemple, la décroissance est en

$$\frac{1}{|2^j k - 2^{j'}k'|^{2(P-H)}}$$

où P est le nombre de moments nuls des ondelettes (Tewfik et Kim [66]). De plus, un mouvement brownien admet une décorrélation à travers les échelles (Flandrin [29]), qui n'est pas imposée ici.

Remarque 4.4. *Soit $P(\omega)$ la puissance spectrale du processus R. La seconde hypothèse (4.25) impose qu'il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que*

$$k_1|\omega|^\alpha \leq P(\omega) \leq k_2|\omega|^\alpha$$

lorsque $\omega \to \infty$. Ceci est par exemple vérifié avec un α négatif pour un mouvement brownien fractionnaire.

Nous allons montrer dans le Théorème 4.2 que les conditions de décorrélation sur les coefficients d'ondelettes du processus R s'étendent, sous une forme plus faible, aux coefficients d'ondelettes du processus F. La preuve de ce Théorème consiste à décomposer des fonctions d'ondelettes dilatées

$$D^*\psi$$

dans une base d'ondelettes, puis à utiliser le résultat de migration des ondelettes par dilatation locale. De façon résumée, pour montrer la décorrélation de $\langle K_F\psi_1, \psi_2\rangle$ lorsque les supports de ψ_1 et de ψ_2 sont éloignés, on écrit :

$$\langle K_F\psi_1, \psi_2\rangle = \langle K_R D^*\psi_1, D^*\psi_2\rangle \ ,$$

et on décompose $D^*\psi_1$ et $D^*\psi_2$ dans une base d'ondelettes sous la forme :

$$D^*\psi = \sum_\lambda \langle D^*\psi, \psi_\lambda\rangle\psi_\lambda,$$

ce qui implique que

$$\langle K_F\psi_1, \psi_2\rangle = \sum_\lambda \sum_{\lambda'} \langle K_R\psi_\lambda, \psi_{\lambda'}\rangle\langle D^*\psi_1, \psi_\lambda\rangle\langle D^*\psi_2, \psi_{\lambda'}\rangle$$

La migration des ondelettes par dilatation locale assure que $\langle D^*\psi_1, \psi_\lambda\rangle$ a une bonne décroissance lorsque l'échelle de ψ_λ s'éloigne de celle de $D^*\psi_1$. On coupe alors les sommes sur λ et λ' en trois, selon les échelles : pour les grandes et pour les petites échelles, on utilise la décroissance des $\langle D^*\psi_1, \psi_\lambda\rangle$, et pour les échelles médianes, on utilise l'hypothèse de décorrélation (4.24), qui assure une décroissance de $\langle K_R\psi_\lambda, \psi_{\lambda'}\rangle$ lorsque les localisations spatiales des ondelettes ψ_λ et $\psi_{\lambda'}$ sont éloignées.

Avant d'énoncer le Théorème, rappelons la signification de quelques paramètres : η et M encadrent la dérivée de la fonction de dilatation locale :

$$0 < \eta \leq d'(x) \leq M \ ,$$

l'échelle des ondelettes est prise égale à $j_0 = -\log_2(N)$, où N est le nombre de points d'échantillonnage du signal. Le paramètre δ, strictement compris entre 0 et 1 définit la taille $\Delta = 2^{-\delta|j_0|}$ des intervalles sur lesquels on moyenne les estimateurs. Enfin, $[-a, a]$ est le support des ondelettes mères, et P leur nombre de moments nuls.

Théorème 4.2 (Décorrélation du processus localement dilaté). *Il existe une constante A telle que pour tout j_0, k_1 et k_2,*

$$|\langle K_F \psi_{j_0 k_1}, \psi_{j_0 k_2} \rangle| \leq A 2^{\alpha |j_0|} \ . \tag{4.26}$$

Si $P \geq \frac{\alpha}{2}$, alors il existe une constante B telle que si

$$c = \frac{1-\delta}{1 + |\alpha| + P - \frac{\alpha}{2}} \ ,$$

alors pour toute échelle j_0 suffisamment petite, et pour toutes positions k_1 et k_2 vérifiant

$$2a \ M\eta 2^{c|j_0|} \leq |k_1 - k_2| \leq 2^{(1-\delta)|j_0|} \ ,$$

on ait

$$|\langle K_F \psi_{j_0 k_1}, \psi_{j_0 k_2} \rangle| \leq B \frac{2^{\alpha |j_0| + |\alpha c j_0|}}{1 + \frac{|k_1 - k_2|}{M\eta 2^{|j_0 c|}} - 2a} \ . \tag{4.27}$$

Preuve Le but de ce théorème étant d'étendre la décorrélation du processus stationnaire R au processus localement dilaté F, nous allons donc utiliser la relation entre la covariance de F et celle de R :

$$K_F = D K_R D^* \ ,$$

donc

$$\langle K_F \psi_{j_0 k_1}, \psi_{j_0 k_2} \rangle = \langle K_R D^* \psi_{j_0 k_1}, D^* \psi_{j_0 k_2} \rangle \ . \tag{4.28}$$

Nous allons décomposer $\langle K_R D^* \psi_{j_0 k_1}, D^* \psi_{j_0 k_2} \rangle$ de façon à faire apparaître des termes de la forme

$$\langle K_R \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle \ ,$$

pour lesquels nous pourrons utiliser l'hypothèse de décorrélation (4.24) sur le processus stationnaire R.

Nous décomposons $D^*\psi_{j_0k_1}$ et $D^*\psi_{j_0k_2}$ dans la frame $(\phi_{J,k}, \psi_{j,k})_{j\leq J}$, dont la frame duale est $\left(\overline{\phi}_{J,k}, \overline{\psi}_{j,k}\right)_{j\leq J}$ (en prenant garde à la normalisation L^1 des ondelettes). Les fonctions $\phi_{J,k}$ et $\overline{\phi}_{J,k}$, appelées fonctions d'échelle, sont des fonctions de basse fréquence.

$$\begin{aligned}
D^*\psi_{j_0k_1} &= \sum_{j,k} 2^j \langle D^*\psi_{j_0k_1}, \psi_{j,k}\rangle \overline{\psi}_{j,k} + \sum_k 2^J \langle D^*\psi_{j_0k_1}, \phi_{J,k}\rangle \overline{\phi}_{j,k} \\
D^*\psi_{j_0k_2} &= \sum_{j',k'} 2^j \langle D^*\psi_{j_0k_2}, \psi_{j',k'}\rangle \overline{\psi}_{j',k'} + \sum_{k'} 2^{J'} \langle D^*\psi_{j_0k_2}, \phi_{J',k'}\rangle \overline{\phi}_{j,k}
\end{aligned}$$

En remplaçant ces deux décompositions dans (4.28), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle K_F\psi_{j_0k_1}, \psi_{j_0k_2}\rangle = &\sum_{j,k}\sum_{j',k'} 2^{j+j'} \langle K_R\overline{\psi}_{j,k}, \overline{\psi}_{j',k'}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_1}, \psi_{j,k}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_2}, \psi_{j',k'}\rangle \\
&+ \sum_{j,k}\sum_{k'} 2^{j+J'} \langle K_R\overline{\psi}_{j,k}, \overline{\phi}_{j',k'}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_1}, \psi_{j,k}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_2}, \phi_{J',k'}\rangle \\
&+ \sum_{k}\sum_{j',k'} 2^{J+j'} \langle K_R\overline{\psi}_{j,k}, \overline{\phi}_{j',k'}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_1}, \phi_{J,k}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_2}, \psi_{j',k'}\rangle
\end{aligned} \tag{4.29}$$

L' ondelette ψ est à support compact dans $[-a,\ a]$, donc pour que

$$\langle D^*\psi_{j_0k_1}, \psi_{j,k}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_2}, \psi_{j',k'}\rangle$$

soit non nul, il faut que

$$d^{-1}(2^{j_0}(k_1 - a)) - 2^j a \leq \quad 2^j k \leq \quad d^{-1}(2^{j_0}(k_1 + a)) + 2^j a \tag{4.30}$$

$$d^{-1}(2^{j_0}(k_2 - a)) - 2^{j'} a \leq \quad 2^{j'} k' \leq \quad d^{-1}(2^{j_0}(k_2 + a)) + 2^{j'} a \tag{4.31}$$

Le nombre d'entiers k (resp.k') correspondant à cette restriction peut être majoré par

$$2a\left(1 + \frac{2^{j_0-j-1}}{\eta}\right) \text{ resp. } 2a\left(1 + \frac{2^{j_0-j'-1}}{\eta}\right)\ . \tag{4.32}$$

Le même raisonnement s'applique pour les termes

$$\langle D^*\psi_{j_0k_1}, \psi_{j,k}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_2}, \phi_{J',k'}\rangle$$

et

$$\langle D^*\psi_{j_0k_1}, \phi_{J,k}\rangle\langle D^*\psi_{j_0k_2}, \psi_{j',k'}\rangle$$

car la fonction d'échelle ϕ est également à support compact dans $[-a,\ a]$.

L'hypothèse de décorrélation sur R implique que

$$|\langle K_R\psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle| \leq C\frac{\sup\left(\langle K_R\psi_{j,0}, \psi_{j,0}\rangle, \langle K_R\psi_{j',0}, \psi_{j',0}\rangle\right)}{1+\frac{|2^jk-2^{j'}k'|}{\max(2^j,2^{j'})}}\ .$$

Nous allons majorer cette quantité indépendamment de k et k'. Les restrictions (4.30-4.31) sur k et k' impliquent que

$$\begin{aligned}|2^jk-2^{j'}k'| &\geq \left|d^{-1}(2^{j_0}(k_1-a)) - d^{-1}(2^{j_0}(k_2+a))\right| - 2^ja - 2^{j'}a\\ &\geq \frac{2^{j_0}|k_1-k_2|}{\eta} - (2^j+2^{j'})a\\ &\geq \frac{2^{j_0}|k_1-k_2|}{\eta} - 2\max(2^j,2^{j'})a\end{aligned}$$

donc on a trouvé un majorant de $|\langle K_R\psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle|$ indépendant de k et k':

$$|\langle K_R\psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle| \leq C\frac{\sup\left(\langle K_R\psi_{j,0}, \psi_{j,0}\rangle, \langle K_R\psi_{j',0}, \psi_{j',0}\rangle\right)}{1+\frac{2^{j_0}|k_1-k_2|}{\eta\max(2^j,2^{j'})} - 2a}\ . \tag{4.33}$$

Le Théorème 4.1 de migration des ondelettes montre qu'asymptotiquement lorsque $j_0 \to -\infty$, $D^*\psi_{j_0,k_1}$(resp. $D^*\psi_{j_0,k_2}$) est proche d'une ondelette de position $d^{-1}(2^{j_0}k_1)$ (resp. $d^{-1}(2^{j_0}k_2)$) et d'échelle $2^{j_0}d'(2^{j_0}k_1)$ (resp. $2^{j_0}d'(2^{j_0}k_2)$). Plus précisément,

$$\begin{aligned}|\langle D^*\psi_{j_0,k_1}, \psi_{j,k}\rangle| &\leq \frac{A_P}{(2^{j_0}2^j)^{1/2}}\left(2^{j_0-j}d'(2^{j_0}k_1)\right)^{P+1/2}\\ &\leq \frac{A'_P}{(2^{j_0}2^j)^{1/2}}\left(\frac{2^{j-j_0}}{d'(2^{j_0}k_1)}\right)^{P+1/2}\\ |\langle D^*\psi_{j_0,k_2}, \psi_{j',k'}\rangle| &\leq \frac{A_P}{(2^{j_0}2^{j'})^{1/2}}\left(2^{j_0-j'}d'(2^{j_0}k_2)\right)^{P+1/2}\\ &\leq \frac{A'_P}{(2^{j_0}2^{j'})^{1/2}}\left(\frac{2^{j'-j_0}}{d'(2^{j_0}k_2)}\right)^{P+1/2}\end{aligned}$$

donc si l'on introduit λ_1 et λ_2 tels que

$$d'(2^{j_0}k_1) = 2^{\lambda_1} \text{ et } d'(2^{j_0}k_2) = 2^{\lambda_2}\ ,$$

et en notant A_P pour $\sup(A_P, A'_P)$,

$$|\langle D^*\psi_{j_0,k_1}, \psi_{j,k}\rangle| \leq \frac{A_P}{(2^{j_0}2^j)^{1/2}} 2^{-(P+1/2)|j-j_0-\lambda_1|} \tag{4.34}$$

$$|\langle D^*\psi_{j_0,k_2}, \psi_{j',k'}\rangle| \leq \frac{A_P}{(2^{j_0}2^{j'})^{1/2}} 2^{-(P+1/2)|j'-j_0-\lambda_2|} \tag{4.35}$$

Nous allons maintenant estimer la valeur absolue de la première ligne de (4.29), c'est-à-dire

$$|L_1| = \left| \sum_{j,k} \sum_{j',k'} 2^{j+j'} \langle K_R\psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_1}, \psi_{j,k}\rangle \langle D^*\psi_{j_0k_2}, \psi_{j',k'}\rangle \right| .$$

Grâce aux estimations (4.33), et (4.34-4.35), nous savons majorer tous les termes de l'expression indépendamment de k et k'. Nous savons également, d'après (4.32), majorer le nombre de termes k et k' qui interviennent dans ces sommes. Ainsi il existe une constante $C_P = 4a^2CA_P$ telle que

$$|L_1| \leq C_P \sum_{jj'} \left[\left(1 + \frac{2^{j_0-j-1}}{\eta}\right) \left(1 + \frac{2^{j_0-j'-1}}{\eta}\right) 2^{(j+j')/2-j_0} \right.$$
$$\left. 2^{-(P+1/2)[|j-j_0-\lambda_1|+|j'-j_0-\lambda_2|]} \frac{\sup\left(\langle K_R\psi_{j,0}, \psi_{j,0}\rangle, \langle K_R\psi_{j',0}, \psi_{j',0}\rangle\right)}{1 + \frac{2^{j_0}|k_1-k_2|}{\eta \max(2^j, 2^{j'})} - 2a} \right]$$

Lorsque $|j - j_0 - \lambda_1|$ ou $|j' - j_0 - \lambda_2|$ est grand, l'argument de la somme du membre de droite décroît exponentiellement à cause du terme

$$2^{-(P+1/2)[|j-j_0-\lambda_1|+|j'-j_0-\lambda_2|]} .$$

Nous allons donc couper cette somme en trois, selon les valeurs relatives de j et $j_0 + \lambda_1$ d'une part, et j' et $j_0 + \lambda_2$ d'autre part.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{jj'} &= \sum_{\substack{j-j_0-\lambda_1>|j_0c| \\ \text{ou } j'-j_0-\lambda_2>|j_0c|}} + \sum_{\substack{-|j_0c|\leq j-j_0-\lambda_1\leq|j_0c| \\ \text{et } -|j_0c|\leq j'-j_0-\lambda_2\leq|j_0c|}} + \sum_{\substack{j-j_0-\lambda_1<-|j_0c| \\ \text{ou } j'-j_0-\lambda_2<-|j_0c|}} \\ &= L_{11} + L_{12} + L_{13} \end{aligned}$$

Estimons L_{11}, i.e. la première somme de (4.36), et considérons la somme pour $j - j_0 - \lambda_1 > |j_0c|$. Pour cette somme, on choisit de majorer $|\langle K_R\psi_{j,k}, \psi_{j',k'}\rangle|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left(\langle K_R\psi_{j,0}, \psi_{j,0}\rangle \langle K_R\psi_{j',0}, \psi_{j',0}\rangle\right)^{1/2} \sim 2^{\alpha(|j|+|j'|)/2} .$$

Alors

$$L_{11} \le \left(\sum_{j-j_0-\lambda_1 > |j_0 c|} \left(1 + \frac{2^{j_0-j-1}}{\eta}\right) \cdot 2^{(j-j_0)/2} \cdot 2^{\alpha|j|/2} \cdot 2^{-(P+1/2)|j-j_0-\lambda_1|} \right)$$
$$\cdot \left(\sum_{j'} \left(1 + \frac{2^{j_0-j'-1}}{\eta}\right) \cdot 2^{(j'-j_0)/2} \cdot 2^{\alpha|j'|/2} \cdot 2^{-(P+1/2)|j'-j_0-\lambda_2|} \right)$$

La deuxième somme, qui porte sur tous les j', peut être majorée par

$$C 2^{\frac{\alpha}{2}|j_0+\lambda_2|} \tag{4.36}$$

lorsque

$$P > \frac{\alpha}{2} \ .$$

Il reste à majorer la somme pour $j - j_0 - \lambda_1 > |j_0 c|$, qui est égale à

$$\sum_{j>0} \left(1 + \frac{2^{-j-\lambda_1-|j_0 c|-1}}{\eta}\right) \cdot 2^{(j+\lambda_1+|j_0 c|)/2} \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}|j+j_0+\lambda_1+|j_0 c||} \cdot 2^{-(P+1/2)(j+|j_0 c|)}$$

On peut majorer $\left(1 + \frac{2^{-j-\lambda_1-|j_0 c|-1}}{\eta}\right)$ par une constante pour $j > 0$. Il reste donc

$$2^{(\lambda_1+|j_0 c|)/2} \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}|j_0+\lambda_1+|j_0 c||} \cdot 2^{-(P+1/2)(|j_0 c|)} \left(\sum_{j>0} \cdot 2^{\left(\frac{\alpha}{2}-P\right)j} \right)$$

qui, lorsque $P > \frac{\alpha}{2}$, équivaut à

$$C \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}|j_0+\lambda_1|} \cdot 2^{(\alpha/2-P)|j_0 c|} \ . \tag{4.37}$$

L'étude de la somme pour $j' - j_0 - \lambda_2 > |j_0 c|$ conduit aux mêmes majorations. En multipliant entre elles les majorations (4.36) et (4.37), on obtient

$$L_{11} \le C \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}(|j_0+\lambda_1|+|j_0+\lambda_2|)} \cdot 2^{(\alpha/2-P)|j_0 c|} \ . \tag{4.38}$$

Etudions maintenant L_{13}, i.e. la troisième somme de (4.36), dans le cas où

$$j - j_0 - \lambda_1 < -|j_0 c| \ :$$

encore une fois, lorsque $P > \frac{\alpha}{2}$., la somme sur tous les j' se majore par

$$C 2^{\frac{\alpha}{2}|j_0+\lambda_2|} \ .$$

et la somme pour $j-j_0-\lambda_1 < -|j_0c|$ est majorée par

$$\sum_{j<0}\left(1+\frac{2^{-j-\lambda_1+|j_0c|-1}}{\eta}\right)\cdot 2^{(j+\lambda_1-|j_0c|)/2}\cdot 2^{\frac{\alpha}{2}|j+j_0+\lambda_1-|j_0c||}\cdot 2^{-(P+1/2)(j-|j_0c|)}$$
$$\leq C\cdot 2^{\frac{\alpha}{2}|j_0+\lambda_1|}\cdot 2^{(\alpha/2-P)|j_0c|}\ .$$

Donc

$$L_{13}\leq C\cdot 2^{\frac{\alpha}{2}(|j_0+\lambda_1|+|j_0+\lambda_2|)}\cdot 2^{(\alpha/2-P)|j_0c|}\ . \tag{4.39}$$

Il reste à estimer L_{12}, qui est la somme du milieu dans (4.36). Cette fois-ci on utilise la majoration pour $|\langle K_R\psi_{j,k},\psi_{j',k'}\rangle|$ qui utilise la décorrélation.

$$L_{12}\leq C\sum_{\substack{-|j_0c|\leq j-j_0-\lambda_1\leq|j_0c|\\ \text{et }-|j_0c|\leq j'-j_0-\lambda_2\leq|j_0c|}}\left[\left(1+\frac{2^{j_0-j-1}}{\eta}\right)\left(1+\frac{2^{j_0-j'-1}}{\eta}\right)2^{(j+j')/2-j_0}\right.$$
$$\left.2^{-(P+1/2)[|j-j_0-\lambda_1|+|j'-j_0-\lambda_2|]}\frac{\sup\left(\langle K_R\psi_{j,0},\psi_{j,0}\rangle,\langle K_R\psi_{j',0},\psi_{j',0}\rangle\right)}{1+\frac{2^{j_0}|k_1-k_2|}{\eta\max(2^j,2^{j'})}-2a}\right]$$

Etant données les bornes de sommation sur j et j', on peut majorer $\max(2^j,2^{j'})$ par $M2^{j_0+|j_0c|}$, où M est un majorant de la dérivée d'. Pour la même raison,

$$\sup\left(\langle K_R\psi_{j,0},\psi_{j,0}\rangle,\langle K_R\psi_{j',0},\psi_{j',0}\rangle\right)$$

est majoré par $M^\alpha 2^{\alpha|j_0|+|\alpha cj_0|}$.
Finalement,

$$L_{12}\leq C\frac{M^\alpha 2^{\alpha|j_0|+|\alpha cj_0|}}{1+\frac{|k_1-k_2|}{M\eta 2^{|j_0c|}}-2a}\sum_{\substack{-|j_0c|\leq j-j_0-\lambda_1\leq|j_0c|\\ \text{et }-|j_0c|\leq j'-j_0-\lambda_2\leq|j_0c|}}\left[\left(1+\frac{2^{j_0-j-1}}{\eta}\right)\left(1+\frac{2^{j_0-j'-1}}{\eta}\right)\right.$$
$$\left.2^{(j+j')/2-j_0}\cdot 2^{-(P+1/2)[|j-j_0-\lambda_1|+|j'-j_0-\lambda_2|]}\right]$$

La dernière somme se majore par une constante. Donc

$$L_{12}\leq C\frac{M^\alpha 2^{\alpha|j_0|+|\alpha cj_0|}}{1+\frac{|k_1-k_2|}{M\eta 2^{|j_0c|}}-2a} \tag{4.40}$$

En regroupant les estimations (4.38,4.39,4.40), on obtient

$$\begin{aligned}L_1 =&L_{11}+L_{12}+L_{13}\\ \leq&C\left(2^{\frac{\alpha}{2}(|j_0+\lambda_1|+|j_0+\lambda_2|)}\cdot 2^{(\alpha/2-P)|j_0c|}+\frac{M^\alpha 2^{\alpha|j_0|+|\alpha cj_0|}}{1+\frac{|k_1-k_2|}{M\eta 2^{|j_0c|}}-2a}\right)\\ \leq&C\left(2^{\alpha|j_0|}\cdot 2^{(\alpha/2-P)|j_0c|}+\frac{2^{\alpha|j_0|+(|\alpha|+1)|j_0c|}}{M\eta 2^{|j_0c|}+|k_1-k_2|-2aM\eta 2^{|j_0c|}}\right)\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de choisir le paramètre c de sorte que le premier terme soit toujours plus petit que le second. Si l'on suppose que

$$|k_1 - k_2| \leq 2^{(1-\delta)|j_0|} ,$$

ceci est vérifié lorsque

$$c = \frac{1-\delta}{1 + |\alpha| + P - \frac{\alpha}{2}} .$$

□

4.3 Consistance des estimateurs

Par abus de langage, on parlera de la consistance d'un estimateur $\widehat{Z}_N$ au lieu d'une suite d'estimateurs $\left(\widehat{Z}_N\right)_{N \in \mathbb{N}}$. Nous rappelons les définitions de la consistance faible et de la consistance forte :

Définition 4.1. *Un estimateur* $\widehat{Z}_N$ *de* Z *est* faiblement consistant *s'il existe une suite* $\epsilon_N \to 0$ *telle que la probabilité*

$$Pr\left\{\left|\widehat{Z}_N - Z\right| > \epsilon_N\right\}$$

tend vers 0 *lorsque* $N \to \infty$.

Définition 4.2. *Un estimateur* $\widehat{Z}_N$ *de* Z *est* fortement consistant *si l'erreur quadratique moyenne*

$$E\left\{\left|\widehat{Z}_N - Z\right|^2\right\}$$

tend vers 0 *lorsque* $N \to \infty$.

L'erreur quadratique moyenne peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$E\left\{\left|\widehat{Z}_N - Z\right|^2\right\} = \left|E\left\{\widehat{Z}_N\right\} - Z\right|^2 + E\left\{\left|\widehat{Z}_N - E\left\{\widehat{Z}_N\right\}\right|^2\right\} .$$

Le premier terme est un terme de biais et le second est un terme de variance. L'estimateur $\widehat{Z}_N$ est donc fortement consistant si et seulement si son biais et sa variance tendent vers 0 lorsque $N \to \infty$.

Un estimateur fortement consistant est d'autant plus efficace que la convergence vers 0 de son erreur quadratique moyenne est rapide. La vitesse de convergence d'un estimateur est définie par le premier terme du développement asymptotique de l'erreur quadratique moyenne renormalisée

$$\left(\frac{E\left\{\left|\widehat{Z}_N - Z\right|^2\right\}}{|Z|^2} \right)^{1/2} .$$

Nous allons maintenant montrer la consistance de

$$\frac{\widehat{\partial_u w}(j_0, k_0)}{\widehat{\partial_{\log s} w}(j_0, k_0)}$$

en tant qu'estimateur de $\frac{d''(u_0)}{d'(u_0)}$. Pour simplifier les notations, nous notons jusqu'à la fin de cette section :

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= \widehat{\partial_u w}(j_0, k_0), & \overline{x} &= \overline{\partial_u w}(j_0, k_0), \\ \widehat{y} &= \widehat{\partial_{\log s} w}(j_0, k_0), & \overline{y} &= \overline{\partial_{\log s} w}(j_0, k_0) . \end{aligned}$$

Le Théorème suivant donne la consistance faible de l'estimateur de la dilatation locale. On le démontre dans le paragraphe 4.3.2, grâce à l'inégalité de Chebyshev, et à la consistance forte des estimateurs $\widehat{\partial_{\mathrm{x}} w}$. Cette consistance forte fait l'objet du paragraphe 4.3.1.

Théorème 4.3 (Consistance de l'estimateur de dilatation locale). *Soit P le nombre de moments nuls de l'ondelette ψ, et α le paramètre de l'hypothèse (4.25).*
On pose

$$\mu = \frac{P - \alpha/2 - |\alpha|}{1 + |\alpha| + (P - \alpha/2)} \text{ et } \Delta = N^{-\mu/(4+2\mu)} .$$

L'estimateur $\widehat{x}/\widehat{y}$ de $d''(u_0)/d'(u_0)$ est faiblement consistant.
Plus précisément

$$Pr\left(\left| \frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{d''(u_0)}{d'(u_0)} \right| \leq \mathcal{O}(N^{-\mu/(4+2\mu)}) \right) \geq 1 - \frac{2}{N^{\mu/2}} .$$

Remarque 4.5. *Le paramètre μ est toujours compris entre 0 et 1, et se rapproche de 1 lorsque le nombre de moments nuls P augmente. Pour $\mu = 1$, on a $\Delta = N^{-1/6}$, ce qui signifie que la longueur des l'intervalles sur lesquels on moyenne diminue lentement lorsque N augmente.*

4.3.1 Résultat d'ergodicité

Le Théorème suivant, donnant la consistance forte des estimateurs $\partial_{\mathrm{x}} w$, se montre grâce à un résultat d'ergodicité de la Proposition 4.2, énoncé plus bas.

Théorème 4.4 (Consistance forte des estimateurs de dérivées partielles). *L'estimateur $\widehat{\partial_u w}(j_0, k_0)$ (resp. $\widehat{\partial_{\log s} w}(j_0, k_0)$) de $\overline{\partial_u w}(j_0, k_0)$ (resp. $\overline{\partial_{\log s} w}(j_0, k_0)$) est fortement consistant, avec une vitesse de convergence majorée par*

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{(N\Delta)^{\mu/2}}\right) ,$$

où μ est défini dans le Théorème 4.3, et Δ est la longueur des intervalles sur lesquels on moyenne.

Remarque 4.6. *Pour $\mu = 1$, on obtient une vitesse de convergence en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(N\Delta)^{1/2}}\right)$, ce qui est la meilleure vitesse de convergence possible, puisqu'elle correspond à une moyenne sur $N\Delta$ échantillons indépendants.*

La Proposition suivante d'ergodicité utilise une hypothèse technique de gaussianité, afin d'obtenir un résultat de décorrélation sur des produits de coefficients d'ondelettes, à partir d'un résultat de décorrélation sur les coefficients d'ondelettes.

Proposition 4.2 (Ergodicité). *Si le processus stationnaire R est gaussien, la variance des estimateurs $\widehat{\partial_u w}(j_0, k_0)$ et $\widehat{\partial_{\log s} w}(j_0, k_0)$ est majorée par*

$$\mathcal{O}\left(\frac{N^{2\alpha}}{(N\Delta)^{\mu}}\right) .$$

Preuve de la Proposition 4.2 (Ergodicité) Notons σ_{x}^2 la variance de $\widehat{\partial_{\mathrm{x}} w}(j_0, k_0)$. Par définition,

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 = E\left\{\left|\widehat{\partial_{\mathrm{x}} w}(j_0, k_0) - E\left\{\widehat{\partial_{\mathrm{x}} w}(j_0, k_0)\right\}\right|^2\right\}$$

Prenons $k_0 = 0$ sans perte de généralité, et notons $n = N\Delta$. On remplace $\widehat{\partial_{\mathrm{x}} w}(j_0, 0)$ par son expression (4.9), et on majore la partie réelle par le module :

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 \le \frac{4}{n^2} E\left\{\left|\sum_{|k|\le n/2} \langle F, \psi_{j_0 k}\rangle \langle F, \tilde{\psi}_{j_0 k}\rangle^* - E\left\{\langle F, \psi_{j_0 k}\rangle \langle F, \tilde{\psi}_{j_0 k}\rangle^*\right\}\right|^2\right\}$$

Notons

$$A_k = \langle F, \psi_{j_0k} \rangle$$
$$B_k = \langle F, \tilde{\psi}_{j_0k} \rangle^*$$

Alors en développant $\left|\sum_{|k|\leq n/2}\right|^2$ sous la forme $\left(\sum_{|k|\leq n/2}\right) \cdot \left(\sum_{|l|\leq n/2}\right)^*$,

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 \leq \frac{4}{n^2} E\left\{ \sum_{|k|\leq n/2} (A_k\ B_k - E(A_k\ B_k)) \sum_{|l|\leq n/2} (A_l\ B_l - E(A_l\ B_l))^* \right\}$$
$$\leq \frac{4}{n^2} \sum_{\substack{|k|\leq n/2 \\ |l|\leq n/2}} E\left\{A_k\ B_k\ A_l^*\ B_l^*\right\} - E(A_k\ B_k) E(A_l^*\ B_l^*)$$

Comme R est gaussienne par hypothèse, F l'est également, ainsi que les variables aléatoires A_k et B_k. On peut donc leur appliquer le lemme classique suivant :

Lemme 4.2. *Si A_k, A_l, B_k, B_l sont des variables aléatoires gaussiennes, alors*

$$E\left\{A_k\ B_k\ A_l^*\ B_l^*\right\} =$$
$$E\left\{A_k\ B_k\right\} E\left\{A_l^*\ B_l^*\right\} + E\left\{A_k\ A_l^*\right\} E\left\{B_k\ B_l^*\right\} + E\left\{A_k\ B_l^*\right\} E\left\{A_l^*\ B_k\right\}$$

Il en résulte que

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 \leq \frac{4}{n^2} \sum_{\substack{|k|\leq n/2 \\ |l|\leq n/2}} E\left\{A_k\ A_l^*\right\} E\left\{B_k\ B_l^*\right\} + E\left\{A_k\ B_l^*\right\} E\left\{A_l^*\ B_k\right\}$$

Grâce au Théorème 4.2, si le support des ondelettes ψ et $\tilde{\psi}$ est inclus dans $[-K, K]$, il existe une constante C telle que

1. pour $|k-l| \geq 2aM\eta 2^{|cj_0|}$,
   $|E\left\{A_k\ A_l^*\right\}|$, $|E\left\{B_k\ B_l^*\right\}|$, $|E\left\{A_k\ B_l^*\right\}|$ et $|E\left\{B_k\ A_l^*\right\}|$ sont majorés par
   $$C \frac{2^{\alpha|j_0| + |\alpha c j_0|}}{1 + \frac{|k-l|}{M\eta 2^{|cj_0|}} - 2a},$$
2. pour tous k, l,
   $|E\left\{A_k\ A_l^*\right\}|$, $|E\left\{B_k\ B_l^*\right\}|$, $|E\left\{A_k\ B_l^*\right\}|$ et $|E\left\{B_k\ A_l^*\right\}|$ sont majorés par
   $$C 2^{\alpha|j_0|}.$$

En séparant la somme sur $|k| \leq n/2$ et $|l| \leq n/2$ en deux, pour $|k-l| < 2aM\eta 2^{|cj_0|}$ et pour $|k-l| \geq 2aM\eta 2^{|cj_0|}$, on obtient

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 \leq \frac{C^2 2aM\eta 2^{|cj_0|}\ n\ 2^{2\alpha|j_0|}}{n^2} + \frac{4C^2}{n^2} \sum_{\substack{|k|,|l| \leq n/2 \\ |k-l| \geq 2aM\eta 2^{|cj_0|}}} \frac{2^{2\alpha|j_0|+2|\alpha c j_0|}}{\left(1 + \frac{|k-l|}{M\eta 2^{|cj_0|}} - 2a\right)^2} .$$

Or la série

$$\sum_{\substack{|k|,|l| \leq n/2 \\ |k-l| \geq 2aM\eta 2^{|cj_0|}}} \frac{2^{2\alpha|j_0|+2|\alpha c j_0|}}{\left(1 + \frac{|k-l|}{M\eta 2^{|cj_0|}} - 2a\right)^2}$$

a pour équivalent $M\eta 2^{|cj_0|} n\ 2^{2\alpha|j_0|+2|\alpha c j_0|}$ donc

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 \leq C' \left(\frac{2^{|cj_0|}\ 2^{2\alpha|j_0|}}{n} + \frac{2^{|cj_0|} n\ 2^{2\alpha|j_0|+2|\alpha c j_0|}}{n^2} \right)$$

et le second membre est dominé par le second terme

$$\frac{2^{|cj_0|}\ 2^{2\alpha|j_0|+2|\alpha c j_0|}}{n} = \frac{2^{|cj_0|}\ 2^{2\alpha|j_0|+2|\alpha c j_0|}}{2^{(1-\delta)|j_0|}} .$$

Puisque le paramètre c est égal à $\frac{1-\delta}{1+|\alpha|+P-\alpha/2}$, on a

$$1 - \delta - c - 2|\alpha|c = (1-\delta)\frac{P - \alpha/2 - |\alpha|}{1 + |\alpha| + P - \alpha/2} = (1-\delta)\mu$$

où

$$\mu = \frac{P - \alpha/2 - |\alpha|}{1 + |\alpha| + P - \alpha/2} .$$

Il en résulte que

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 \leq \frac{2^{\alpha|j_0|}}{2^{(1-\delta)|j_0|\mu}}$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 4.2.
□

La consistance forte des estimateurs se déduit aisément de cette Proposition :
Preuve du Théorème 4.4 En comparant (4.9) et (4.8), il est immédiat de vérifier que $\widehat{\partial_u w}(j_0, k_0)$ est un estimateur non biaisé de $\overline{\partial_u w}(j_0, k_0)$.

L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur est donc égale à la variance, et peut être majorée grâce à la Proposition 4.2 par

$$E\left\{\left|\widehat{\partial_u w}(j_0,k_0)-\overline{\partial_u w}(j_0,k_0)\right|^2\right\}\leq \mathcal{O}\left(\frac{N^{2\alpha}}{(N\Delta)^{\mu}}\right) .$$

L'estimateur est donc fortement consistant. Sa vitesse de convergence est majorée par

$$\left(\left(\left|\widehat{\partial_u w}(j_0,k_0)\right|^2\right)^{-1}\mathcal{O}\left(\frac{N^{2\alpha}}{(N\Delta)^{\mu}}\right)\right)^{1/2} .$$

Or le terme $\left|\widehat{\partial_u w}(j_0,k_0)\right|^2$ a typiquement un ordre de grandeur de $\mathcal{O}\left(N^{2\alpha}\right)$, donc la vitesse de convergence peut être majorée par

$$\mathcal{O}\left(1/(N\Delta)^{\mu/2}\right) .$$

Le cas de l'estimateur $\widehat{\partial_{\log s} w}(j_0,k_0)$ se traite exactement de la même façon. □

4.3.2 Consistance de l'estimateur de dilatation locale

En corollaire du Théorème 4.4, on montre grâce à l'inégalité de Chebyshev le Lemme suivant, dont on déduira immédiatement la consistance faible de l'estimateur de la dilatation locale.

Lemme 4.3. *Pour tout a,*

$$Pr\left\{\left|\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}}-\frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right|\leq\frac{2a}{(N\Delta)^{\mu/2}-a}\right\}\geq 1-\frac{2}{a^2} .$$

Preuve On déduit du Théorème 4.4 que

$$E\left\{\left|\frac{\widehat{x}-\overline{x}}{\overline{x}}\right|^2\right\}\leq\mathcal{O}\left(\frac{1}{(N\Delta)^{\mu}}\right) ,$$

et la même relation pour y. Par l'inégalité de Chebyshev ([11]), en approximant $\mathcal{O}\left(\frac{1}{(N\Delta)^{\mu}}\right)$ par $\frac{1}{(N\Delta)^{\mu}}$, on a

$$Pr\left\{\left|\frac{\widehat{x}-\overline{x}}{\overline{x}}\right|\leq\frac{a}{(N\Delta)^{\mu/2}}\right\}\geq 1-\frac{1}{a^2} \qquad (4.41)$$

$$Pr\left\{\left|\frac{\widehat{y}-\overline{y}}{\overline{y}}\right|\leq\frac{a}{(N\Delta)^{\mu/2}}\right\}\geq 1-\frac{1}{a^2} \qquad (4.42)$$

Il est immédiat de vérifier que

$$\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \left(\frac{1 + \frac{\widehat{x} - \overline{x}}{\overline{x}}}{1 + \frac{\widehat{y} - \overline{y}}{\overline{y}}} \right) ,$$

donc

$$\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \frac{\frac{\widehat{x} - \overline{x}}{\overline{x}} - \frac{\widehat{y} - \overline{y}}{\overline{y}}}{1 + \frac{\widehat{y} - \overline{y}}{\overline{y}}} . \tag{4.43}$$

Par ailleurs, la double condition que

$$\left| \frac{\widehat{x} - \overline{x}}{\overline{x}} \right| \leq \frac{a}{(N\Delta)^{\mu/2}}$$

et que

$$\left| \frac{\widehat{y} - \overline{y}}{\overline{y}} \right| \leq \frac{a}{(N\Delta)^{\mu/2}} ,$$

implique que

$$\left| \frac{\frac{\widehat{x} - \overline{x}}{\overline{x}} - \frac{\widehat{y} - \overline{y}}{\overline{y}}}{1 + \frac{\widehat{y} - \overline{y}}{\overline{y}}} \right| \leq \frac{2a}{(N\Delta)^{\mu/2} - a} ,$$

donc grâce à (4.43), implique que

$$\left| \frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \right| \leq \frac{2a}{(N\Delta)^{\mu/2} - a} .$$

Ainsi,

$$Pr \left\{ \left| \frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \right| \leq \frac{2a}{(N\Delta)^{\mu/2} - a} \right\} \geq Pr \left\{ \left| \frac{\widehat{x} - \overline{x}}{\overline{x}} \right| \leq \frac{a}{(N\Delta)^{\mu/2}} \bigcap \left| \frac{\widehat{y} - \overline{y}}{\overline{y}} \right| \leq \frac{a}{(N\Delta)^{\mu/2}} \right\} .$$

Mais

$$Pr\{A \cap B\} = Pr\{A\} + Pr\{B\} - Pr\{A \cup B\} ,$$

donc grâce à (4.41) et (4.42),

$$Pr \left\{ \left| \frac{\widehat{x} - \overline{x}}{\overline{x}} \right| \leq \frac{a}{(N\Delta)^{\mu/2}} \bigcap \left| \frac{\widehat{y} - \overline{y}}{\overline{y}} \right| \leq \frac{a}{(N\Delta)^{\mu/2}} \right\} \geq (1 - \frac{1}{a^2}) + (1 - \frac{1}{a^2}) - 1$$

ce qui donne le résultat cherché.
□

Le Lemme 4.3 permet de montrer la consistance faible de l'estimateur $\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}}$ de $\frac{d''(u_0)}{d'(u_0)}$.

Preuve du Théorème 4.3 Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{d''(u_0)}{d'(u_0)}\right| &\leq \left|\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right| + \left|\frac{\overline{x}}{\overline{y}} - \frac{d''(u_0)}{d'(u_0)}\right| \\ &\leq \left|\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right| + \mathcal{O}(\Delta)\end{aligned}$$

grâce à (4.4). donc

$$Pr\left(\left|\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{d''(u_0)}{d'(u_0)}\right| \leq \frac{2a}{(N\Delta)^{\mu/2} - a} + \mathcal{O}(\Delta)\right) \geq 1 - \frac{2}{a^2} \ .$$

Le majorant de

$$\left|\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{d''(u_0)}{d'(u_0)}\right|$$

s'interprète comme la somme d'un terme de biais $\mathcal{O}(\Delta)$ et d'un terme de variance $\frac{2a}{(N\Delta)^{\mu/2}-a}$. Nous allons chercher une suite $a_N \to \infty$ telle que le terme de variance tende vers zéro à la même vitesse que le terme de biais. En égalisant Δ et $\frac{a_N}{(N\Delta)^{\mu/2}}$, on voit que

$$\Delta = \left(\frac{a_N^2}{N^\mu}\right)^{\frac{1}{2+\mu}}$$

doit tendre vers zéro. Un choix de $a_N = N^{\mu/4}$ donne :

$$\Delta = N^{-\frac{\mu}{4+2\mu}} \ .$$

et on a donc

$$Pr\left(\left|\frac{\widehat{x}}{\widehat{y}} - \frac{d''(u_0)}{d'(u_0)}\right| \leq \mathcal{O}(N^{-\frac{\mu}{4+2\mu}})\right) \geq 1 - \frac{2}{N^{\mu/2}} \ .$$

$\square$

4.4 Extension en deux dimensions

Nous avons montré dans le Théorème 2.7 que la variance des coefficients de warplets d'un processus localement dilaté bidimensionnel vérifient une équation de transport (2.69) que nous rappelons ci-dessous :

$$(1+\mathcal{O}(s))\frac{\partial}{\partial u_k}w(\boldsymbol{u},S) - \sum_{i,j\in\{1,2\}} c_{ij}(\boldsymbol{u},S)\ a_{ij}^k(\boldsymbol{u}) = 0\ . \tag{4.44}$$

Les $\left(a_{ij}^k(\boldsymbol{u})\right)_{i,j\in\{1,2\}}$ et les $(c_{ij}(\boldsymbol{u},S))_{i,j\in\{1,2\}}$ sont respectivement les éléments des matrices

$$A^k(\boldsymbol{u}) = J_{\boldsymbol{u}}^{-1}\frac{\partial}{\partial u_k}(J_{\boldsymbol{u}})\ ,$$

et

$$C(\boldsymbol{u},S) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial s_{11}}(\boldsymbol{u},S) & \frac{\partial w}{\partial s_{12}}(\boldsymbol{u},S) \\ \frac{\partial w}{\partial s_{21}}(\boldsymbol{u},S) & \frac{\partial w}{\partial s_{22}}(\boldsymbol{u},S) \end{pmatrix} \times S^T\ . \tag{4.45}$$

Nous écrivons (4.44) à nouveau, avec une nouvelle notation pour le produit scalaire :

$$[c_{11}(\boldsymbol{u},S), c_{12}(\boldsymbol{u},S), c_{21}(\boldsymbol{u},S), c_{22}(\boldsymbol{u},S)] \begin{bmatrix} a_{11}^k(\boldsymbol{u}) \\ a_{12}^k(\boldsymbol{u}) \\ a_{21}^k(\boldsymbol{u}) \\ a_{22}^k(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u_k}w(\boldsymbol{u},S)(1+\mathcal{O}(s)\ . \tag{4.46}$$

Comme le font par exemple Malik et Rosenholtz [45] pour le problème de *Shape from Texture*, ou Bernard [9] pour le problème du flot optique, on peut voir l'équation ci-dessus comme une ligne d'un système linéaire dont les inconnues sont les $\left(a_{ij}^k(\boldsymbol{u})\right)_{i,j\in\{1,2\}}$ (i.e. les quatre coefficients du gradient de texture $J_{\boldsymbol{u}}^{-1}\frac{\partial}{\partial u_k}(J_{\boldsymbol{u}})$).
Pour différentes matrices d'échelle S, on obtient différentes lignes de ce système linéaire. Etant donné qu'il y a quatre inconnues, pour que le système soit inversible, il faut choisir au moins quatre matrices d'échelle $(S_m)_{m=1\ldots M}$.

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\boldsymbol{u},S_1) & c_{12}(\boldsymbol{u},S_1) & c_{21}(\boldsymbol{u},S_1) & c_{22}(\boldsymbol{u},S_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{11}(\boldsymbol{u},S_M) & c_{12}(\boldsymbol{u},S_M) & c_{21}(\boldsymbol{u},S_M) & c_{22}(\boldsymbol{u},S_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^k(\boldsymbol{u}) \\ a_{12}^k(\boldsymbol{u}) \\ a_{21}^k(\boldsymbol{u}) \\ a_{22}^k(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{u_k} w(\boldsymbol{u},S_1) \\ \vdots \\ \partial_{u_k} w(\boldsymbol{u},S_M) \end{pmatrix} . \tag{4.47}$$

L'estimation du gradient de texture pour différentes directions k ne nécessite que la modification du second membre de ce système, car la matrice du membre de gauche ne dépend pas de la direction k.

Analyse statistique

Il reste donc à estimer les $c_{ij}(\boldsymbol{u},S)$ et les $\frac{\partial}{\partial u_k} w(\boldsymbol{u},S)$ à partir d'une seule réalisation du processus. Pour cela, nous introduisons une moyenne glissante, non plus sur des intervalles mais sur des sous-domaines carrés de $[0,1]\times[0,1]$ de taille $\Delta \times \Delta$. Si $\boldsymbol{k}$ désigne un couple d'entiers, et si $\|\boldsymbol{u}\|_\infty$ désigne la plus grande coordonnée en valeur absolue du vecteur $\boldsymbol{u}$, on définit des moyennes sur un sous-domaine carré de côté Δ et centré en $\boldsymbol{u}_0$ par

$$\overline{c_{ij}}(\boldsymbol{u}_0,S_m) = \frac{1}{(N\Delta)^2} \sum_{\|\frac{\boldsymbol{k}}{N}-\boldsymbol{u}_0\|_\infty \le \Delta/2} c_{ij}(\boldsymbol{k}/N,S_m) .$$

et pour x prenant ses valeurs parmi $s_{11},\ s_{12},\ s_{21},\ s_{22},\ u_1,\ u_2$, on définit

$$\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(\boldsymbol{u}_0,S_m) = \frac{2}{(N\Delta)^2} \sum_{\|\frac{\boldsymbol{k}}{N}-\boldsymbol{u}_0\|_\infty \le \Delta/2} \partial_{\mathrm{x}} w(\boldsymbol{k}/N,S_m) .$$

En moyennant (4.46) sur un carré de taille $\Delta \times \Delta$ centré en $\boldsymbol{u}_0$, on obtient un système linéaire moyenné :

$$\begin{bmatrix} \overline{c_{11}}(\boldsymbol{u}_0,S_1) & \overline{c_{12}}(\boldsymbol{u}_0,S_1) & \overline{c_{21}}(\boldsymbol{u}_0,S_1) & \overline{c_{22}}(\boldsymbol{u}_0,S_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{c_{11}}(\boldsymbol{u}_0,S_M) & \overline{c_{12}}(\boldsymbol{u}_0,S_M) & \overline{c_{21}}(\boldsymbol{u}_0,S_M) & \overline{c_{22}}(\boldsymbol{u}_0,S_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^k(\boldsymbol{u}_0)+\mathcal{O}(\Delta) \\ a_{12}^k(\boldsymbol{u}_0)+\mathcal{O}(\Delta) \\ a_{21}^k(\boldsymbol{u}_0)+\mathcal{O}(\Delta) \\ a_{22}^k(\boldsymbol{u}_0)+\mathcal{O}(\Delta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\partial_{u_k}} w(\boldsymbol{u}_0,S_1) \\ \vdots \\ \overline{\partial_{u_k}} w(\boldsymbol{u}_0,S_M) \end{pmatrix} . \tag{4.48}$$

Etant donnée l'expression (4.45) de la matrice $C(\boldsymbol{u}, S)$, chacun des termes $c_{ij}(\boldsymbol{u}, S_m)$ est une combinaison linéaire des quatre termes $\frac{\partial}{\partial s_{ij}} w(\boldsymbol{u}, S_m)$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. L'estimation des $\overline{c_{ij}}(\boldsymbol{u}_0, S_m)$, ainsi que celle des $\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(\boldsymbol{u}_0, S_m)$, passe donc par l'estimation de termes de la forme

$$\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(\boldsymbol{u}_0, S_m) \ .$$

Tout comme en une dimension, ces termes peuvent s'écrire à l'aide d'une ondelette $\tilde{\psi}^{\mathrm{x}}$ légèrement différente, dont la valeur exacte dépend de x :

$$\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(\boldsymbol{u}_0, S_m) = \frac{2}{(N\Delta)^2} \sum_{\|\frac{\boldsymbol{k}}{N} - \boldsymbol{u}_0\|_\infty \leq \Delta/2} Re \left[E \left\{ \langle F, \psi_{\frac{\boldsymbol{k}}{N} S_m} \rangle \langle F, \tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{\frac{\boldsymbol{k}}{N} S_m} \rangle^* \right\} \right] \ .$$

L'estimateur choisi pour $\overline{\partial_{\mathrm{x}} w}(\boldsymbol{u}_0, S_m)$ est bien entendu

$$\widehat{\partial_{\mathrm{x}} w}(\boldsymbol{u}_0, S_m) = \frac{2}{(N\Delta)^2} \sum_{\|\frac{\boldsymbol{k}}{N} - \boldsymbol{u}_0\|_\infty \leq \Delta/2} Re \left[\langle F, \psi_{\frac{\boldsymbol{k}}{N} S_m} \rangle \langle F, \tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{\frac{\boldsymbol{k}}{N} S_m} \rangle^* \right] \ . \quad (4.49)$$

Avec une hypothèse de décorrélation sur R, on peut prouver, de la même façon qu'en une dimension, la décorrélation spatiale de

$$E \left\{ \langle F, \psi_{\frac{\boldsymbol{k}}{N}, S} \rangle \langle F, \psi_{\frac{\boldsymbol{k}'}{N}, S} \rangle \right\}$$

pour $\|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'\|_\infty$ suffisamment grand. Pour prouver le transfert de la décorrélation des coefficients de warplets de R à ceux de F, on décompose $\psi_{\frac{\boldsymbol{k}}{N}, S}$ et $\psi_{\frac{\boldsymbol{k}'}{N}, S}$ dans une frame d'ondelettes de la forme $\tilde{\psi}_{2^j \boldsymbol{k}, 2^j Id}$, qui ont P moments nuls dans une direction, et on obtient un résultat de migration avec les mêmes estimations (4.10-4.13) qu'en une dimension.

Grâce à la décorrélation, les variances des estimateurs (4.49) peuvent être bornées par un terme qui tend vers zéro comme $\frac{1}{(N\Delta)^{2\mu}}$, alors qu'en une dimension, cette variance tend vers zéro comme $\frac{1}{(N\Delta)^{\mu}}$. Ceci assure la consistance forte des estimateurs des $c_{ij}(\boldsymbol{u}, S)$ et des $\frac{\partial}{\partial u_k} w(\boldsymbol{u}, S)$. En appliquant comme en une dimension l'inégalité de Chebyshev, on peut en déduire la consistance faible de l'estimateur des $\left(a^k_{ij}(\boldsymbol{u})\right)_{i,j \in \{1,2\}}$ obtenu en inversant (4.48).

Le Chapitre 5 montre les applications numériques de cette méthode au problème de *Shape from Texture*.

Chapitre 5

Résultats numériques

5.1 Résumé de l'algorithme

5.1.1 En une dimension

Dans une étape préliminaire, on choisit une longueur Δ pour le moyennage, en fonction du nombre de points d'échantillonnage du signal. La théorie statistique préconise un choix de Δ inférieur à $N^{-1/6}$. L'algorithme se déroule en quatre étapes :

1. Pour l'échelle s sélectionnée, calculer les transformées en ondelettes avec les ondelettes ψ, et $\tilde{\psi}^{\mathrm{x}}$:

$$\langle F, \psi_{\frac{k}{N},s} \rangle \text{ et } \langle F, \tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{\frac{k}{N},s} \rangle \ ;$$

2. Moyenner sur des intervalles de longueur Δ centrés en u_0 pour obtenir les estimateurs

$$\widehat{\partial_u w}(u_0, s) \text{ et } \widehat{\partial_{\log s}}(u_0, s) \ ;$$

3. En déduire les $d''(u_0)/d'(u_0)$ en calculant les quotients

$$\frac{\widehat{\partial_u w}(u_0, s)}{\widehat{\partial_{\log s}}(u_0, s)} \ ;$$

4. Eventuellement, intégrer ces valeurs pour obtenir $d'(u)$ à une constante multiplicative près.

5.1.2 En deux dimensions

On commence par fixer une longueur Δ, ce qui correspond à découper l'image en $\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$ sous-domaines de taille $\Delta \times \Delta$. L'algorithme se déroule ensuite en cinq étapes :

1. Sélectionner des matrices $(S_m)_{m=1,\dots,M}$ avec $M \geq 4$. Calculer les transformées en warplets
$$\langle F, \psi_{\frac{\boldsymbol{k}}{N},S_m}\rangle \text{ et } \langle F, \tilde{\psi}^{\mathrm{x}}_{\frac{\boldsymbol{k}}{N},S_m}\rangle$$
pour $\mathrm{x} = u_1, u_2, s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$.
2. Calculer les estimateurs $\widehat{\partial_{\mathrm{x}} w}(\boldsymbol{u}_0, S_m)$, puis les $\widehat{c_{ij}}(\boldsymbol{u}_0, S_m)$.
3. Estimer les $a^k_{ij}(\boldsymbol{u}_0)$ en inversant le système
$$\begin{bmatrix} \widehat{c_{11}}(\boldsymbol{u}_0, S_1) & \widehat{c_{12}}(\boldsymbol{u}_0, S_1) & \widehat{c_{21}}(\boldsymbol{u}_0, S_1) & \widehat{c_{22}}(\boldsymbol{u}_0, S_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{c_{11}}(\boldsymbol{u}_0, S_M) & \widehat{c_{12}}(\boldsymbol{u}_0, S_M) & \widehat{c_{21}}(\boldsymbol{u}_0, S_M) & \widehat{c_{22}}(\boldsymbol{u}_0, S_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k_{11}(\boldsymbol{u}_0) \\ a^k_{12}(\boldsymbol{u}_0) \\ a^k_{21}(\boldsymbol{u}_0) \\ a^k_{22}(\boldsymbol{u}_0) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\partial_{u_k}} w(\boldsymbol{u}_0, S_1) \\ \vdots \\ \widehat{\partial_{u_k}} w(\boldsymbol{u}_0, S_M) \end{pmatrix} .$$
4. Estimer la surface grâce à la méthode décrite au paragraphe 1.3.6 : pour chaque position $\boldsymbol{u}_0$, on crée un vecteur h avec les valeurs de $a^k_{ij}(\boldsymbol{u}_0)$ estimées dans les deux directions $k = 1$ et $k = 2$, puis on cherche l'angle de dévers θ qui minimise
$$\left\| J_\theta (J_\theta^T J_\theta)^{-1} J_\theta^T h - h \right\|^2 .$$
où J_θ est défini en (1.15). On déduit la pente σ grâce à (1.13).
5. Intégrer le système (1.17) pour trouver la forme de la surface.

5.1.3 Choix des échelles

Le choix des échelles auxquelles on effectue la transformée en ondelettes ou en warplets doit être fait avec soin, de façon à choisir une échelle où le signal ou l'image a suffisamment d'énergie. Ceci peut poser un problème lorsque la distribution fréquentielle varie fortement dans l'espace, comme le notent Stone et Isard [64], ainsi que Lindeberg [42]. Dans un tel cas, il faudra choisir plusieurs échelles pour la transformée en ondelettes, et privilégier localement l'échelle la plus énergétique.

Choisir plusieurs échelles pourrait avoir un intérêt dans un cas tout-à-fait différent, où plusieurs phénomènes de dilatation locale se superposent, à des échelles différentes. On pourrait alors segmenter les différents phénomènes en choisissant des échelles adaptées. Ceci permettrait de résoudre le problème de *Shape from Texture* avec occlusion, qui consiste à estimer au même point les orientations locales respectives de plusieurs surfaces texturées, comme par exemple lorsqu'on regarde une pelouse à travers un grillage (Black et Rosenholtz [12]).

5.2 Implémentation

5.2.1 Transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes continue peut s'implémenter de manière efficace en utilisant la transformée de Fourier rapide. La transformée en ondelettes d'une fonction f s'écrit

$$\langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int f(x) \psi_s^* (x-u) \; dx \ ,$$

où $\psi_s(x) = \frac{1}{s}\psi(x/s)$. A s fixé, cette expression devient une fonction de u qui peut être vue comme le produit de convolution de f avec la fonction miroir de ψ_s^* (où on a remplacé x par $-x$), dont la transformée de Fourier est simplement $\hat{\psi}^*(s\ \omega)$. Ceci indique une technique pour implémenter la transformée en ondelettes continue, pour des ondelettes dont on connaît l'expression analytique : choisir d'abord l'échelle s, puis calculer la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}(\omega)\hat{\psi}^*(s\ \omega)$. La complexité numérique d'un tel calcul est celle de la transformée de Fourier, soit $N \log(N)$ si N est la taille du signal.
Parmi les nombreux exemples d'ondelettes possibles (Daubechies [26], Mallat [46]), nous détaillons ici les ondelettes de Gabor et les ondelettes Sombrero, dont la transformée de Fourier a une expression analytique.

Ondelettes de Gabor

Les ondelettes de Gabor (également appelées ondelettes de Morlet) ont pour fonction mère une fonction gaussienne modulée :

$$\psi(x) = \frac{1}{(\sigma^2\pi)^{1/4}} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{i\xi x}.$$

La transformée de Fourier de ψ est une gaussienne centrée en ξ :

$$\widehat{\psi}(\omega) = (4\pi\sigma^2)^{1/4} e^{-\sigma^2(\omega-\xi)^2/2} \ .$$

Si le produit $\sigma\xi$ est suffisamment grand, $\widehat{\psi}(\omega) \approx 0$ pour $\omega \leq 0$: on peut considérer que numériquement, ces ondelettes ont des moments nuls.
L'ondelette ψ^u qui sert à calculer la dérivée par rapport à la position a pour transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\widehat{\psi^u}(\omega) =& i\omega\widehat{\psi}(\omega)\\ =& i(4\pi\sigma^2)^{1/4}\omega e^{-\sigma^2(\omega-\xi)^2/2} \ .\end{aligned}$$

Quant à l'ondelette $\psi^{\log b}$ qui sert à calculer la dérivée par rapport à la dilatation, sa transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned}\widehat{\psi^{\log b}}(\omega) =& \omega\widehat{\psi}'(\omega)\\ =& -\sigma^2(4\pi\sigma^2)^{1/4}\omega(\omega-\xi)e^{-\sigma^2(\omega-\xi)^2/2} \ .\end{aligned}$$

Ondelette Sombrero

La dérivée seconde d'une fonction gaussienne a une forme de "'chapeau mexicain" ou "sombrero". Cette ondelette a deux moments nuls. Son expression analytique en Fourier est simplement la transformée de Fourier d'une gaussienne, que multiplie $(-\omega^2)$, avec un facteur de renormalisation :

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{-\sqrt{8}\sigma^{\frac{5}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}}\omega^2 \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) \ .$$

Les ondelettes qui servent à calculer les dérivées partielles par rapport à la position et à l'échelle se calculent de façon simple, comme pour l'ondelette de Gabor.

5.2.2 Transformée en warplets

La transformée en warplets $\langle F, \psi_{\boldsymbol{u},S}\rangle$ peut se voir comme une convolution en espace, et se calculer, pour une matrice d'échelle S fixés, par transformée de Fourier inverse de

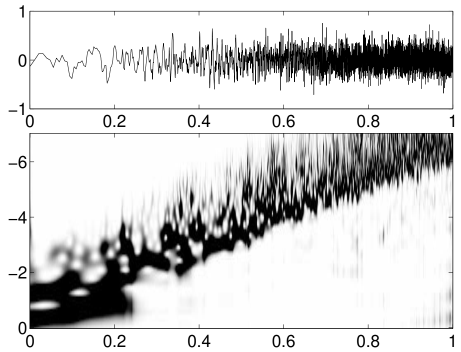
$$\hat{F}(\boldsymbol{\omega})\hat{\psi}(S^T\boldsymbol{\omega})$$

où $\hat{F}(\boldsymbol{\omega})$ est la transformée de Fourier de $F(\boldsymbol{x})$ et S^T est la transposée de la matrice S.
On choisit des ondelettes de Gabor bidimensionnelles, dont la transformée de Fourier est

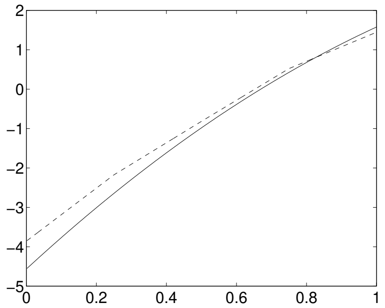
$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(-\tfrac{\sigma^2}{2}\left|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\xi}\right|^2\right)$$

La fréquence $\boldsymbol{\xi}$ est choisie dans la direction de ω_1.

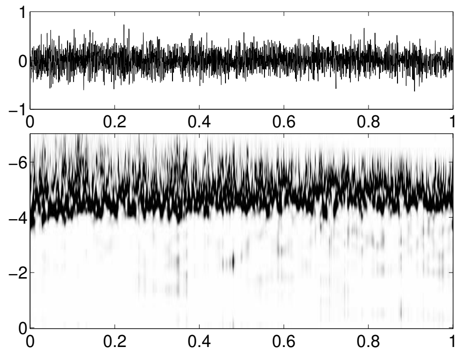
5.3 Signaux synthétiques



(a) Signal localement dilaté F et sa transformée en ondelettes.



(b) Fonction $\log d'$ théorique (trait plein) et estimée (pointillés)



(c) Processus stationnarisé en appliquant à F la réciproque de la dilatation locale estimée

FIG. 5.1 – *Exemple d'un signal synthétique.*

Nous reprenons l'exemple du processus localement dilaté dont la covariance est représentée Figure 2.1. Nous nous donnons un signal (Figure 5.1(a)) qui est une réalisation de ce processus, et nous cherchons à estimer la dilatation locale dont il est l'objet. La fonction de dilatation locale $d(x)$ utilisée dans cet exemple vérifie

$$\log(d'(x)) = 8x - 2x^2 \ .$$

à une constante additive près. Cette fonction $\log(d'(x))$ est représentée Figure 5.1(b), en trait continu.
Le signal étant de longueur $N = 2^{11} = 8192$, nous choisissons de découper l'intervalle $[0, 1]$ en la puissance de deux la plus proche de $N^{1/6}$, c'est-à-dire quatre. L'algorithme estime quatre valeurs de $(\log(d'(x)))'$, que nous intégrons pour obtenir $\log(d'(x))$ à une constante additive près (Figure 5.1(b), en pointillés). Le temps requis par le calcul est de 5 secondes sous MATLAB sur un Pentium Pro 200MHz. Le signal restationnarisé par la réciproque de la dilatation locale estimée, ainsi que sa transformée en ondelettes, sont représentés dans la Figure 5.1(c).

5.4 Signaux de laser

Nous présentons ici les résultats numériques relatifs à la présentation du paragraphe 1.2 sur la calibration des signaux de laser. Le signal laser que nous analysons est issu d'une technique d'homodynage décrite dans [14], et nous a été fourni par R. Brunner du Fraunhofer Institut (Freiburg i. Br.). Le courant de polarisation du semi-conducteur a une forme de créneau, et le signal résultant de l'homodynage a une fréquence qui suit une courbe exponentielle avant de se stabiliser vers une valeur limite. Ceci est dû à l'inertie thermique du composant actif du laser, qui subit une période de relaxation durant laquelle la température converge exponentiellement vers la température limite.

La Figure 5.4(a) montre le signal de laser mesuré, échantillonné sur $2^{16} = 65536$ points, ainsi que sa transformée en ondelettes. L'axe des abscisses de la transformée en ondelettes correspond à la position u, et l'axe des ordonnées à $-\log(s)$, sur quatre octaves (entre le bas et le haut, les échelles sont divisées par $2^4 = 16$). On peut voir que le support de la transformée en ondelettes selon l'axe des échelles ne varie presque pas en fonction de la position u, et ceci nous indique que signal peut a priori rentrer dans le cadre des signaux localement dilatés.
L'ondelette mère que nous utilisons dans cette étude est un “Sombrero” (i.e. la dérivée seconde d'une fonction gaussienne, décrite au paragraphe 5.2.1). Nous décomposons le signal sur quatre échelles d'ondelettes distinctes, et sous-découpons l'intervalle $[0, 1]$ en quatre, afin d'estimer dans chaque sous-intervalle la moyenne des variations relatives de la dilatation locale.
La Figure 5.4(b) montre le logarithme du facteur de dilatation locale $\log d'$ calculé en intégrant les valeurs estimées par l'algorithme sur les quatre sous-intervalles. Le temps requis par ce calcul est d'environ 10 minutes sous MAT-

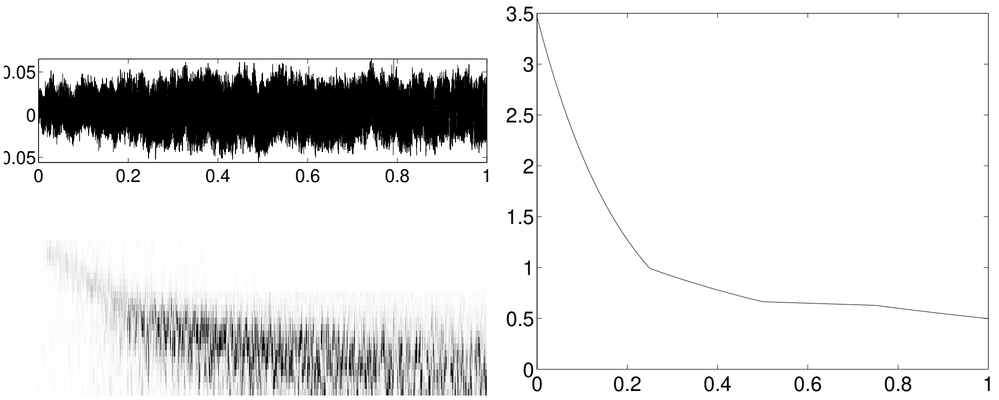
LAB, sur un Pentium Pro 200MHz. On peut constater la bonne correspondance entre cette courbe, et le dessin de la transformée en ondelettes dans la Figure 5.4(a).
Nous stationnarisons ensuite le signal original en le transformant par la réciproqie de la fonction de dilatation locale. Le signal stationnarisé est représenté Figure 5.4(c) avec sa transformée en ondelettes. Mise à part une composante relativement haute fréquence de faible énergie, on constate une invariance temporelle de cette transformée en ondelettes.
Le signal stationnarisé peut être utile afin d'estimer la largeur de bande du signal de départ. La Figure 5.4(d) montre deux spectres, c'est-à-dire les modules carrés de transformées de Fourier, restreints aux fréquences positives. Celui du signal original (en haut) mélange toute l'information temporelle d'un signal non stationnaire dont la fréquence centrale varie au cours du temps. Par contre, le spectre du signal stationnarisé (en bas) est plus étroit car la fréquence centrale ne varie plus au cours du temps, et on peut l'utiliser pour mesurer la largeur de bande du laser.

Les résultats de ces expériences numériques montrent que la modélisation de ce signal sous la forme d'un signal localement dilaté est pertinente. Des études sont actuellement menées par R. Brunner afin de dégager un modèle physique du fonctionnement du laser qui puisse expliquer l'origine de ce phénomène de dilatation.

Algorithme itératif Pour améliorer l'estimation de la dilatation locale, on peut envisager d'itérer l'algorithme, lorsque le signal stationnarisé résultant d'un premier calcul ne présente pas la stationnarité requise. On introduit alors une mesure de stationnarité, basée sur la variance de la transformée en ondelettes du processus stationnarisé, et on itère l'algorithme tant que la mesure de stationnarité augmente. On notera que cette mesure de stationnarité constitue également une validation de la pertinence du modèle de processus localement dilaté.

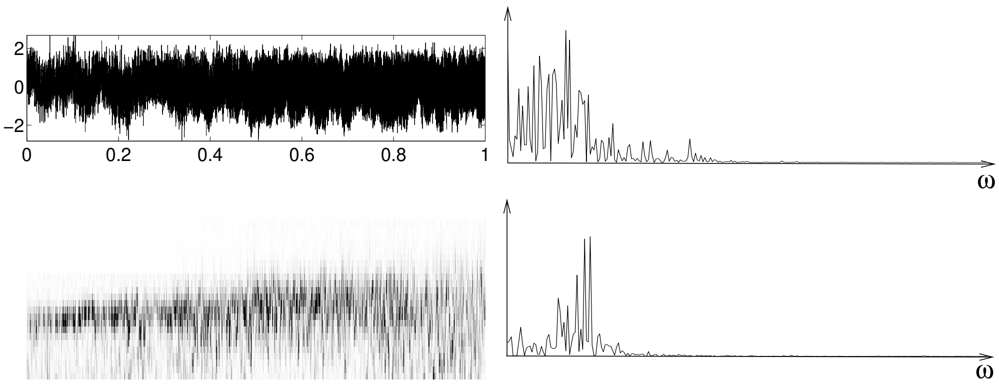
5.5 Textures projetées synthétiques

Nous illustrons l'algorithme de résolution de *Shape from Texture* sur des exemples synthétiques : nous expliquons d'abord brièvement comment ces exemples synthétiques ont été générés, avant de passer à leur résolution.



(a) Signal de laser et sa transformée en ondelettes

(b) Valeur estimée de $\log d'$



(c) Signal stationnarisé en inversant la dilatation locale

(d) Spectres du signal original (en haut) et localement dilaté (en bas)

FIG. 5.2 – *Etude d'un signal laser issu d'un homodynage.*

Synthèse d'images texturées en perspective

Nous souhaitons générer la vues en perspective d'une texture sur une surface. Ce problème ne nécessite en fait pas de savoir effectivement plaquer la texture sur la surface, mais seulement de savoir comment on la verrait en perspective, *si elle était plaquée.* Nous allons décomposer le problème en deux : dans un premier temps on calcule une vue de face de la surface texturée, et ensuite seulement on prend en compte la projection perspective.

Nous nous donnons une texture stationnaire, que nous *supposons* être plaquée sur la surface. Il est important de bien noter qu'il y a d'emblée une hypothèse d'adéquation entre la texture stationnaire et la surface, de sorte que la texture résultant du placage soit tangentiellement stationnaire.

Nous commençons par faire une projection orthogonale de la surface texturée sur un plan frontal. L'image résultant de cette projection contient une texture généralement non stationnaire, mais que nous savons calculer pour des surfaces de géométrie simple. Désignons par P' le point générique de la surface S, de coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3). Si R est la texture, supposée stationnaire par rapport à la surface, nous définissons une texture $\widetilde{R}(x'_1, x'_2) = R(x'_1, x'_2, x'_3(x'_1, x'_2))$, qui n'est plus stationnaire dans le plan (O, x'_1, x'_2).
Nous passons à la prise en compte de la perspective. Dans le paragraphe 1.3.1, nous établissons la relation géométrique entre P', le point générique de la surface, et P, sa projection par perspective dans l'image. Les coordonnées (x_1, x_2) de P sont reliées à celles de P' par :

$$(x_1, x_2) = \left(-\frac{L_0\ x'_1}{x'_3}, -\frac{L_0\ x'_2}{x'_3} \right) \ .$$

L'image F finale vérifie donc la relation :

$$F\left(-\frac{L_0\ x'_1}{x'_3}, -\frac{L_0\ x'_2}{x'_3} \right) = \widetilde{R}(x'_1, x'_2) \ .$$

La mise en œuvre de chacune des deux étapes nécessite une interpolation bidimensionnelle, et notre algorithme fait pour cela appel à la fonction d'interpolation bilinéaire `griddata` de Matlab.

Texture régulière sur une sphère

Nous avons généré, grâce à la méthode décrite ci-dessus, une texture sur une calotte sphérique que l'on observe de dessus. La calotte sphérique se projette orthogonalement sur un carré de largeur unité, et l'observateur est à une distance de trois unités. La projection perspective de la sphère texturée est représentée Figure 5.3(a), et on peut voir la forme de la sphère sur la Figure 5.3(b).

On découpe l'image en 16 sous-domaines, et une valeur du gradient de texture est estimé dans chacun de ces sous-domaines, grâce à une transformée en warplets de l'image. On applique ensuite l'algorithme décrit dans le paragraphe 5.1.2 pour estimer l'orientation de la normale correspondant à chacune des 16 valeurs du gradient de texture, puis la forme de la surface par intégration du système (1.17). La surface résultant de cette intégration est représentée sur la Figure 5.3(c), et la Figure 5.3(d) montre la différence entre la surface originale et la surface estimée. Nous avons choisi de ne pas lisser la surface obtenue, afin que la méthode de résolution soit plus visible, mais une régularisation permettrait de réduire encore l'erreur entre la surface originale et la surface estimée.

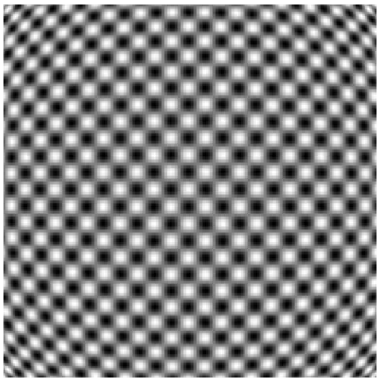
La Figure 5.4 représente les résultats correspondant à une calotte sphérique renversée, observée de dessus, à une distance de 2 unités.

Texture stochastique sur un plan

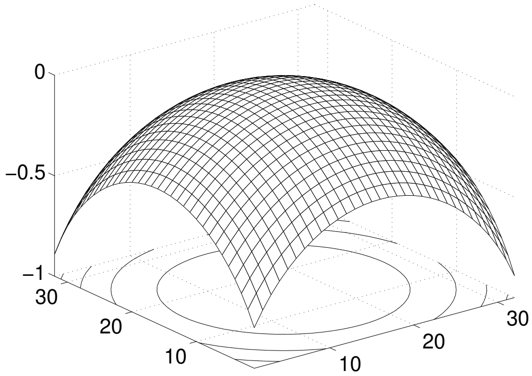
Les textures planes subissent également des compressions par projection perspective. Nous avons apliqué l'algorithme à l'esimation de l'orientation d'un plan, à partir d'une surface plane texturée. Les résultats de cette simulation sont représentés dans la Figure 5.5

Remarque 5.1. *Le temps de calcul est assez élevé dans la version actuelle de l'algorithme (dix minutes environ sous sc Matlab sur un Pentium Pro 200MHz, pour une image de taille* 256×256*), mais il pourra considérablement être réduit par l'introduction de bancs de filtres pour le calcul des transformées en ondelettes et en warplets.*

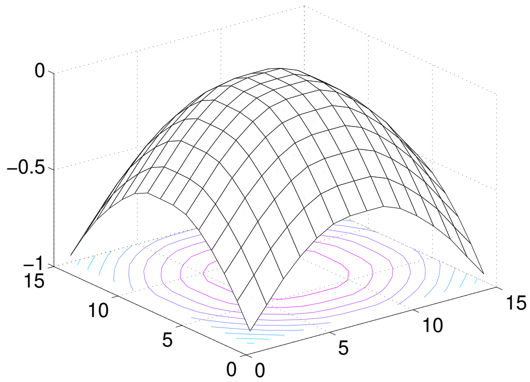
Remarque 5.2. *D'autres méthodes de résolution de* Shape from Texture *avec des ondelettes ont été développées (Hwang, Lu et Chung [38]), qui reposent sur la recherche de ridges, i.e. de maxima locaux (en échelle) dans la transformée en ondelettes. Notre méthode s'applique même lorsque la transformée en ondelettes n'a pas de maxima locaux en échelle.*



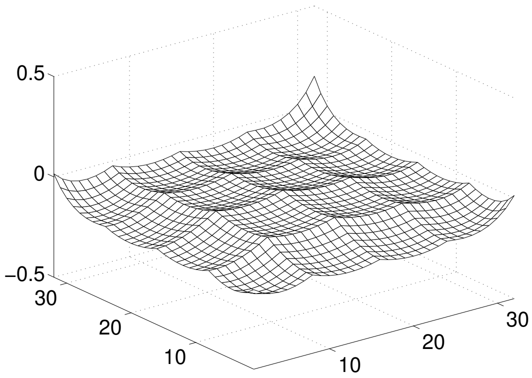
(a) Projection perspective d'une calotte sphérique texturée, vue de dessus



(b) Surface théorique

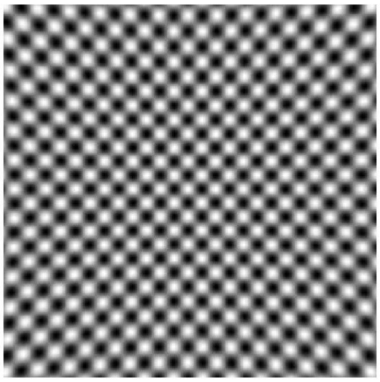


(c) Surface estimée à partir de l'image (a)

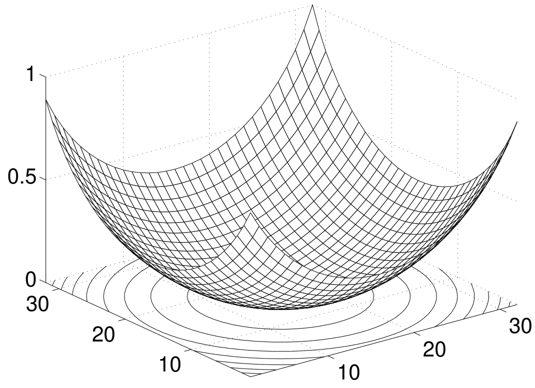


(d) Différence entre les surfaces théorique et estimée

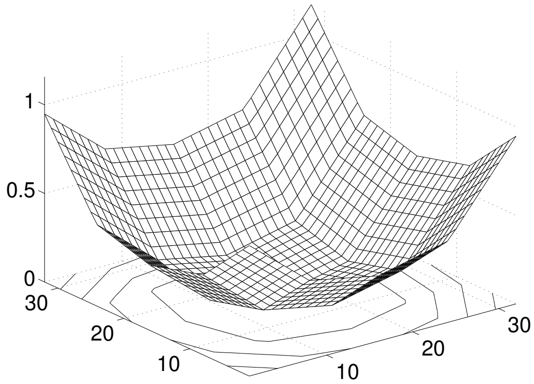
FIG. 5.3 –



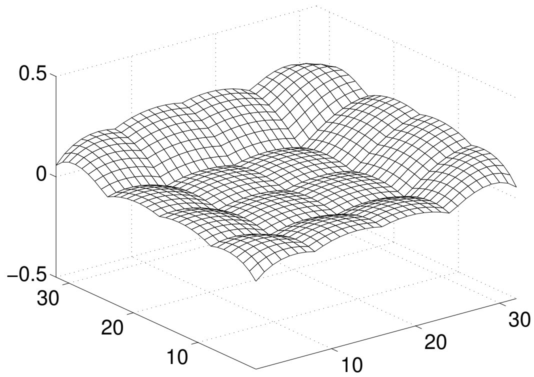
(a) Projection perspective d'une calotte sphérique inversée texturée, vue de dessus



(b) Surface théorique

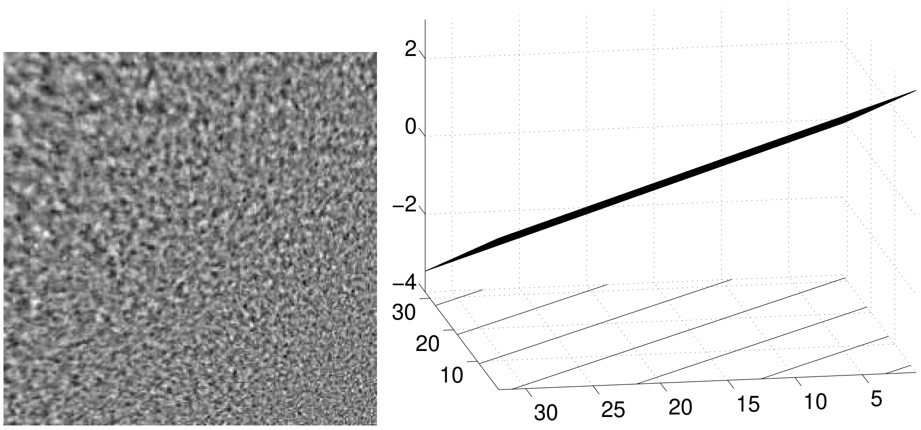


(c) Surface estimée à partir de l'image (a)



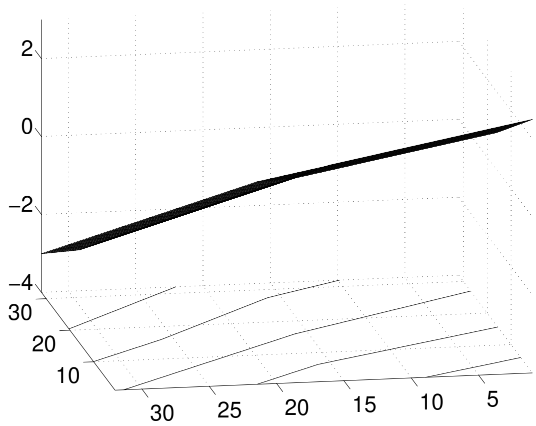
(d) Différence entre les surfaces théorique et estimée

FIG. 5.4 – *Texture régulière sur une calotte sphérique inversée.*

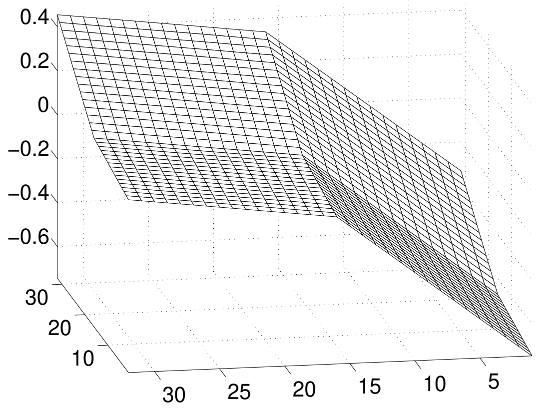


(a) Projection perspective d'un plan texturé

(b) Surface théorique



(c) Surface estimée à partir de l'image (a)



(d) Différence entre les surfaces théorique et estimée

FIG. 5.5 – *Texture stochatique sur une surface plane.*

Conclusion

Dans notre étude des processus localement dilatés, nous avons mis l'accent sur la stationnarisation. Nous avons montré qu'à petite échelle, les ondelettes et les warplets permettent de linéariser la dilatation locale : les coefficients de ces transformées satisfont à une équation de transport dont la vitesse mesure les variations relatives de la dérivée (ou de la matrice jacobienne) de la dilatation locale.
En analysant le problème de *Shape from Texture* à la lumière de ces résultats, nous avons été amenés à définir une nouvelle notion de stationnarité pour les textures définies sur des surfaces courbes, que nous avons baptisée stationnarité tangentielle.
L'étude statistique a mis en évidence l'importance de la migration des ondelettes par dilatation locale, qui permet d'obtenir un estimateur consistant de la dilatation locale.
Des algorithmes ont été mis en œuvre afin d'estimer la dilatation locale pour les processus monodimensionnels, et le gradient de texture puis la forme de la surface pour des images de textures projetées.

La notion de stationnarisation peut avoir des applications au-delà de l'étude des processus localement dilatés. Nous pensons qu'il serait intéressant de l'appliquer par exemple à l'étude des processus localement stationnaires.

Dans l'étude des textures sur des surfaces courbes, il nous semble possible d'introduire une notion assez générale de stationnarité paramétrique, et de résoudre le problème de *Shape from Texture* dans ce cadre.

Au chapitre de l'estimation numérique, il serait intéressant de chercher une mesure de la stationnarisation pour les images, qui permettrait une validation automatique de la pertinence du modèle comme c'est le cas en une dimension.

Bibliographie

[1] P. Abry, P. Gonçalves, and P. Flandrin. Wavelets, spectrum analysis and $1/f$ processes. In *Wavelets and Statistics*, volume 103 of *Lecture Notes in Statistics*, pages 15–29. Springer-Verlag, Berlin, 1995. A. Antoniadis and G. Oppenheim eds.

[2] R. Altes and E. Titlebaum. Bat signals as optimally Doppler tolerant waveforms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 48:1014–1020, 1970.

[3] Y. Amit. A non-linear variational problem for image matching. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(1), 1994.

[4] Y. Amit, U. Grenander, and M. Piccioni. Structural image restoration through deformable templates. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 86:376–387, 1991.

[5] R. Bajcsy and L. Lieberman. Texture gradient as a depth cue. *Computer Graphics and Image Processing*, 5:52–67, 1976.

[6] D.H. Ballard and C.M. Brown. *Computer Vision*. Prentice-Hall, Inc., 1982.

[7] A. Benassi, S. Cohen, and J. Istas. Identifying the multifractional function of a gaussian process. *Statistics and probability letters*, 39:337–345, 1998.

[8] C. Bennis. *Synthèse de textures hiérarchiques planes. Développement de surfaces 3D pour un placage de textures minimisant les distorsions*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1990.

[9] Ch. Bernard. Discrete wavelet analysis: a new framework for fast optic flow computation,. In *European Conference on Computer Vision*, Freiburg, June 1998. Springer.

[10] Ch. Bernard. Discrete wavelet analysis for fast optic flow computation. Technical Report 415, Ecole Polytechnique, 1999.

[11] P. Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, 1995.

[12] M. Black and R. Rosenholtz. Robust estimation of multiple surface shapes from occluded textures. In *International Symposium on Computer Vision*, pages 485–490, November 1995.

[13] A. C. Bovik, N. Gopal, T. Emmoth, and A. Restrepo (Palacios). Localized measurement of emergent image frequencies by Gabor wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):691–712, March 1992.

[14] R. Brunner and M. Tacke. Fast time-frequency analysis for tunable diode lasers. In *Proc. fifth international symposium on gas analysis by tunable diode lasers*, pages 59–62, Freiburg i. Br., 1998.

[15] M. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, 1976.

[16] E. Catmull. *A subdivision algorithm for computer display of curved surfaces.* PhD thesis, University of Utah, 1974.

[17] P. Cavanagh. Reconstructing the third dimension: Interactions between color, texture, motion, binocular disparity, and shape. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 37:171–195, 1987.

[18] P. Cheo, editor. *Handbook of Solid-State Lasers*, chapter Semiconductor Diode Lasers: Theory and Techniques. Marcel Dekker, 1989.

[19] R. Cipolla and P. Menconça. The structure and motion of surfaces. In *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision*, volume 25 of *Progress in Systems and Control Theory*, pages 369–391. Birkhäuser, 1999.

[20] M. Clerc and S. Mallat. Shape from texture and shading with wavelets. In *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision*, volume 25 of *Progress in Systems and Control Theory*, pages 393–417. Birkhäuser, 1999.

[21] M. Clerc and S. Mallat. Shape from texture through deformations. In *Proc. 7th Int. Conf. on Computer Vision*, Kerkyra, Greece, September 1999.

[22] R. R. Coifman and Y. Meyer. Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre. *C.R. Acad. Sci.*, pages 259–261, 1991.

[23] L. Conlon. *Differentiable Manifolds, A First Course.* Birkhäuser, 1993.

[24] R. Dahlhaus. The analysis of nonstationary time series and curve estimation with locally stationary models. Institute of Statistical Sciences, Academia Sinica, March 1997.

[25] R. Dahlhaus. Fitting time series models to nonstationary processes. *Annals of Statistics*, 25:1–37, 1997.

[26] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[27] J. G. Daugmann. Two-dimensional spectral analysis of cortical receptive field profile. *Vision Research*, 20:847–856, 1980.

[28] P. Flandrin. On the spectrum of fractional brownian motions. *IEEE Trans. Info. Theory*, 35(1):197–199, 1989.

[29] P. Flandrin. Wavelet analysis and synthesis of fractional brownian motion. *IEEE Trans. Info. Theory*, 38(2):910–917, 1992.

[30] D. Gabor. Theory of communication. *J. IEE*, 93:429–457, 1946.

[31] A. Gagalowicz and S. Ma. Sequential synthesis of natural textures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 30:289–315, 1985.

[32] J. Gårding. Shape from texture for smooth curved surfaces in perspective projection. *J. of Math. Imaging and Vision*, 1992.

[33] J. Gårding. Surface orientation and curvature from differential texture distorsion. In *Proc. 5th Int. Conf. on Computer Vision*, pages 733–739, Cambridge, Massachussetts, 1995.

[34] J. Gibson. *The Perception of the Visual World.* Houghton Mifflin, Boston, 1950.

[35] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to square integrable group representations, i. general results. *J. Math. Phys.*, pages 2473–2479, 1985.

[36] B.K.P. Horn. *Robot Vision.* The MIT Electrical Engineering and Computer Science Series. McGraw-Hill, 1986.

[37] D. Hubel and T. Wiesel. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex. *J. of Physiology*, 160, 1962.

[38] W. Hwang, C-S Lu, and P-C Chung. Shape from texture: Estimation of planar surface orientation through the ridge surfaces of continuous wavelet transform. *IEEE Trans. Image Proc.*, 7:773–780, 1998.

[39] V. Interrante. Illustrating surface shape in volume data via principal direction-driven 3d line-integral convolution. In *Computer Graphics*, 1997.

[40] K. Kanatani and T.C. Chou. Shape from texture: General principle. *Artificial Intelligence*, 38:1–48, 1989.

[41] U. Keich. *Stationary Approximations to Non-Stationary Stochastic Processes.* PhD thesis, New-York University, 1996.

[42] T. Lindeberg. Feature detection with automatic scale election. *Int. J. of Computer Vision*, 30(2):77–116, 1998.

[43] P.L. Lions, E. Rouy, and A. Tourin. Shape-from-shading, viscosity solutions and edges. *Numer. Math.*, 64:323–353, 1993.

[44] J. Maillot. *Trois approches du plaquage de texture sur un objet tridimensionnel.* PhD thesis, Université de Paris 6, 1992.

[45] J. Malik and R. Rosenholtz. Computing local surface orientation and shape from texture for curved surfaces. *Int. J. of Computer Vision*, 23(2):149–168, 1997.

[46] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing.* Academic Press, 1997.

[47] S. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3397–3415, December 1993.

[48] S. Mallat, Z. Zhang, and G. Papanicolaou. Adaptive covariance estimation of locally stationary processes. *Annals of Stat.*, 26(1):1–47, 1998.

[49] B. Mandelbrot and J.W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10(4):422–437, 1968.

[50] Steve Mann and Simon Haykin. The chirplet transform: Physical considerations. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 43(11):2745–2761, November 1995.

[51] E. Masry. The wavelet transform of stochastic processes with stationary increments and its application to fractional brownian motion. *IEEE Trans. Info. Theory*, 39(1):260–264, 1993.

[52] T. McInerney and D. Terzopoulos. Deformable models in medical image analysis: a survey. *Medical Image Analysis*, 1(2), 1996.

[53] Y. Meyer. *Opérateurs de Calderón-Zygmund.* Hermann, 1990.

[54] G. Papanicolaou and K. Sølna. Estimation of local power law processes. submitted to Annals of Statistics.

[55] X. Pennec. *L'incertitude dans les problèmes de reconnaissance et de recalage. Application en imagerie médicale et biologie moléculaire.* PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1996.

[56] A.P. Pentland. Shading into texture. *Artificial Intelligence*, 1986.

[57] J. Perrin, B. Torrésani, and Ph. Fuchs. Stereoscopic images matching using a localized correlation function. submitted to IEEE Trans. on Image Proc.

[58] O. Perrin. *Modèle de covariance d'un processus non-stationnaire par déformation de l'espace et statistique.* PhD thesis, Université Paris I, Panthéon-Sorbonne, 1997.

[59] M.B. Priestley. Evolutionary spectra and non-stationary processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 27:204–229, 1965.

[60] J.O. Ramsay and B.W. Silverman. *Functional Data Analysis.* Springer, 1997.

[61] R. Rosenholtz and J. Malik. Surface orientation from texture: Isotropy or homogeneity (or both)? *Vision Res.*, 37(16):2283–2293, 1997.

[62] P. Sampson and P. Guttorp. Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure. *Journal of the American Statistical Association*, 87:108–119, 1992.

[63] S. Soatto. The accommodation cue in vision. In *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision*, volume 25 of *Progress in Systems and Control Theory*, pages 433–448. Birkhäuser, 1999.

[64] J. Stone and S. Isard. Adaptive scale filtering: a general method for obtaining shape from texture. *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell.*, 17(3):713–718, 1995.

[65] B. Super and A. Bovik. Shape from texture using local spectral moments. *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell.*, 17(4):333–343, 1995.

[66] A.H. Tewfik and M. Kim. Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional brownian motion. *IEEE Trans. Info. Theory*, 38(2):904–909, 1992.

[67] A. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, 237:37–72, 1952.

[68] G. Turk. Generating textures on arbitrary surfaces using reaction-diffusion. In *Computer Graphics*, volume 25(4), pages 289–298, July 1991. (SIGGRAPH '91 Conference Proceedings).

[69] K. Wang and T. Gasser. Alignment of curves by dynamic time warping. *Annals of Statistics*, 25(3):1251–1276, 1997.

[70] A. Witkin and M. Kass. Reaction-diffusion textures. In *Computer Graphics*, volume 25(4), pages 299–308, July 1991. (SIGGRAPH '91 Conference Proceedings).

[71] G.W. Wornell. A Karhunen-Loève-like expansion for $1/f$ processes via wavelets. *IEEE Trans. Info. Theory*, 36(4):859–861, 1990.

[72] G.W. Wornell. Wavelet-based representations for the $1/f$ family of fractal processes. *Proc. IEEE*, 1993.

[73] A.M. Yaglom. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*, volume 1. Springer-Verlag, 1987.

[74] I.G. Zurbenko. Spectral analysis of non-stationary time series. *International Statistical Review*, 59, no.2:163–173, 1991.