

Séance 2

Géométrie Epipolaire

①

① Géométrie projective

(NB: - on note A^T la transposée
 - \wedge est le produit vect.
 - par rapport au cours, les v ont disparu)

1.1) \mathbb{P}^2 (plan projectif)

- Point: $(u, v) \rightarrow m = (u, v, 1)^T$ à $\lambda \neq 0$ près (coord. homogènes)
- Direction: $u\vec{i} + v\vec{j} \rightarrow m = (u, v, 0)^T$ (point à l' ∞)
- Droite $\ell = (a, b, c)^T$ avec $m \in \ell \Leftrightarrow m^T \ell = 0$

Propriétés :

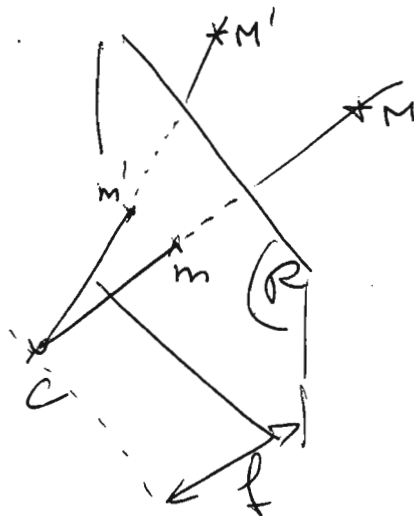
- i) m_1 et m_2 donnés, $m_1 \wedge m_2$ est la droite (m_1, m_2)
- ii) ℓ_1 et ℓ_2 donnés, $\ell_1 \wedge \ell_2$ est leur intersection même si elles sont //.
- iii) $\ell_\infty = (0, 0, 1)$ est la droite à l' ∞ ($(u, v, 0)^T \in \ell_\infty$)

1.2) \mathbb{P}^3 espace projectif

- Points $M = (X, Y, Z, T)^T$ à $\lambda \neq 0$ près
- $T = 0 \rightarrow$ points à l' ∞ (directions)
- $\pi = (a, b, c, d)^T$ plan ($M \in \pi \Leftrightarrow M^T \pi = 0$)
- Droites: coordonnées de Plücker (pas vu en cours)

2) Camera

Le modèle le + simple (pinhole camera)



- \mathcal{R} : rétine
- C: centre optique
- M: point 3D
- m: image 2D
- f = distance focale

(i) Cas où $C=0$, $\mathcal{R}=\{z=1\}$ et le point $(x, y, 1)$ de \mathcal{R} est numérisé en (u, v) par le capteur.

Alors : $u = x/z$, $v = y/z$ ce qu'on peut écrire

$$m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \hline 3 \times 1 & 3 \times 4 \end{pmatrix} M \begin{matrix} \\ \\ 4 \times 1 \end{matrix} \text{ en coordonnées homogènes}$$

(ii) Si maintenant $\mathcal{R}=\{z=f\}$ (focale $\neq 1$) alors

$$m = PM \text{ avec } P = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } u = f \frac{x}{z}, v = f \frac{y}{z}$$

(iii) Si on tient compte maintenant du changement de repère du capteur : $u = d_u \frac{x}{z} + u_0$, $v = d_v \frac{y}{z} + v_0$

$$\text{soit } P = \begin{pmatrix} d_u & 0 & u_0 \\ 0 & d_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (NB: } d_u = f / \text{larg. pixel, } d_v = f / \text{haut. pixel)}$$

(iv) Maintenant l'observateur se déplace \rightarrow $\begin{cases} R \text{ rotation} \\ t \text{ translation} \end{cases}$

$$m = PM \text{ avec } P = K [R | t]$$
$$K = \begin{pmatrix} d_u & & u_0 \\ & d_v & v_0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 6 \text{ param. extrinsèques} \\ 4 \text{ param. intrinsèques} \end{matrix}$$

3) Relations utiles

(NB: si pixels non rectangls (ie. \square) alors un 5^e param. intrins.)
(NB: On a négligé la distortion)

i) Rayon de m :

- en coord. non homogènes pour M et avec $P = (A|b)$

$$\lambda m = AM + b$$

et donc $M = \lambda A^{-1} m - A^{-1} b$

- en particulier, on a (avec $\lambda=0$ et $\lambda=\infty$) :

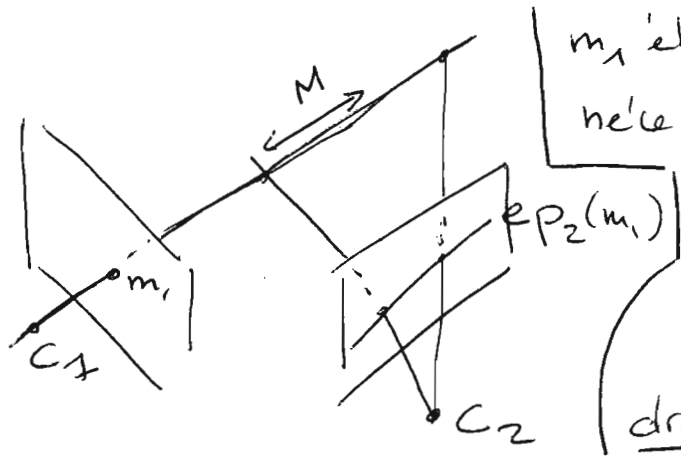
$$C = -A^{-1} b \text{ (coord. non homog.)}$$
$$A^{-1} m \text{ est la direction du rayon}$$

ii) Les points du plan focal (plan // à \mathcal{R} passant par C) se projettent à l'infini, donc en $(u, v, 0)^T$
 → la troisième ligne de P est l'équation du plan focal. En particulier:

la troisième ligne de A est la normale à \mathcal{R}

4) Géométrie épipolaire

On a maintenant 2 caméras P_1 et P_2



m_1 étant donné, m_2 est nécessairement sur la projection du rayon $C_1 m_1$ dans l'image 2: c'est la droite épipolaire de m_1 dans 2

m_1 connu $\rightarrow m_2 \in ep_2(m_1) = P_2(C_1 m_1)$

Si $P_i = (A_i | b_i)$ alors:

• on cherche deux points du rayon $C_1 m_1$, que l'on projette

$$\left\{ \begin{array}{l} \times C_1 = \begin{pmatrix} -A_1^{-1} b_1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow e_2 = P_2 C_1 = \boxed{-A_2 A_1^{-1} b_1 + b_2 = e_2} \\ e_2 \text{ est l'épipôle } (\forall m_1, e_2 \in ep_2(m_1)) \\ \times M_\infty = \begin{pmatrix} A_1^{-1} m_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow m_{2\infty} = P_2 M_\infty = A_2 A_1^{-1} m_1 \end{array} \right.$$

• on a alors $ep_2(m_1) = e_2 \wedge m_{2\infty} = [e_2]_\wedge A_2 A_1^{-1} m_1$

en posant $\boxed{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_\wedge = \begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ -b & 0 & a \\ c & -a & 0 \end{pmatrix}}$

D'où finalement la relation symétrique :

$m_2 \in ep_2(m_1) \Leftrightarrow m_1 \in ep_1(m_2) \Leftrightarrow m_2^T F_{21} m_1 = 0$
 avec $F_{21} = [e_2]_\wedge A_2 A_1^{-1}$ (matrice fondamentale)

I | Mesure de photo consistance

- la plus courante est la corrélation croisée normalisée (NCC)
- Soit W un voisinage autour des pixels:

$$\left\{ \begin{aligned} \langle I_i, m_i, I_j, m_j \rangle &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \left[(I_i(m_i+w) - \bar{I}_i(m_i)) \right. \\ &\quad \left. \times (I_j(m_j+w) - \bar{I}_j(m_j)) \right] \\ \text{avec } \bar{I}_i(m_i) &= \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} I_i(m_i+w) \end{aligned} \right.$$

$$\text{puis } \boxed{NCC(I_i, m_i, I_j, m_j) = \frac{\langle I_i, m_i, I_j, m_j \rangle}{(\langle I_i, m_i, I_i, m_i \rangle \langle I_j, m_j, I_j, m_j \rangle)^{1/2}}$$

On a $-1 \leq NCC \leq 1$. Plus NCC est grande, plus les "textures" autour de m_i et m_j sont "similaires".

- Si deux images sont reliées par une transformation affine, $NCC = 1$
- Limitations:
 - invariante seulement par translation
 - pb de l'ouverture: ambiguïtés, par ex. le long d'un contour

II | Points "saillants"

1- Points de Harris:

- G_σ gaussienne
- $H = \begin{pmatrix} (I_x)^2 * G_\sigma & (I_x I_y) * G_\sigma \\ (I_x I_y) * G_\sigma & (I_y)^2 * G_\sigma \end{pmatrix}$

tenseur de structure. (I_x, I_y dérivés)