Séance 7
Du projectif au métrique

1 Compléments 1 caméra

(i) Une droite l de $\mathbb{P}^2$ devient $H^{-T}l$ si l'espace est transformé par une homographie 2D H car

$$l^T m = 0 \iff (H^{-T}l)^T (Hm) = 0$$

(ii) Une conique de $\mathbb{P}^2$ est donnée par une matrice symétrique 3x3 C et l'équation : $m^T C m = 0$

Par H, elle devient $H^{-T} C H^{-1}$

(iii) Points circulaires : $I = (1, i, 0)^T$ et $J = (1, -i, 0)^T$ sont des points de l_∞ imaginaires. Ils sont invariants par similitude directe $\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ de $\mathbb{P}^2$ $(\lambda > 0)$

(Réciproquement : toute transfo H les laissant invariants est une simil. directe)

- Ils sont nommés ainsi car ils sont ~~les~~ intersections de tout cercle avec l_∞.
- La conique $C^*_\infty = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \{I, J\}$ intervient dans des mesures d'angle entre directions de $\mathbb{P}^2$

(iv) Dans $\mathbb{P}^3$, on considère le plan à l'∞ $\pi_\infty = (0,0,0,1)$ paramétré par (X, Y, Z) (i.e. on laisse $T = 0$)

La conique absolue $\Omega_\infty = I_{3,3}$ d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ est invariante par similitude et par similitude seulement.

- Elle intervient dans des mesures d'angle entre directions de $\mathbb{P}^3$

(v) $P = K[R|t]$

- (KR) établit le lien entre les points m de l'image et les directions d de leur rayon :
  $m = KR\,d$ ($m \in$ image, $d \in \Pi_\infty$ (non homog.))

- l'image de Ω_∞ est $\omega = (KR)^{-T}\,\Omega_\infty\,(KR)^{-1}$
  soit $\boxed{\omega = (KK^T)^{-1}}$

  Elle ne dépend que de K ! Pas de R ni de t.
  (NB : Normal car Ω_∞ est invariante par similitude !)

(vi) Détermination de ω

ⓐ En utilisant les propriétés de Ω_∞ sur la mesure d'angles on trouve :

- m_1 et m_2 ont des rayons $\perp$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{m_1^T \omega m_2 = 0}$.
- m et l définissent un rayon d et un plan Π tel que $d \perp \Pi$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{l = \omega m}$

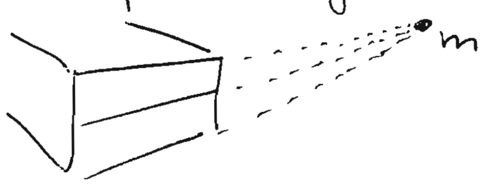
A l'aide de telles relations et aussi du fait que :

- pixels rectangles $\Rightarrow$ $\omega_{12} = 0$
- pixels carrés $\Rightarrow$ $\omega_{12} = 0$ et $\omega_{11} = \omega_{22}$

on trouve 5 équations fournissant les 5 paramètres de ω (mat 3x3 sym. à 1 facteur près)

ⓑ En pratique :

- les points dont on sait que les rayons sont $\perp$ sont des points de fuite



- 3 faces $\perp$ ales + pixels carrés $\to \omega$.

(vii) Utilisation pour la calibration interne

→ Si on connait ω alors Choleski donne K

$$\omega^{-1} = KK^T \quad (K \text{ triang. supérieure})$$

2) Reconstruction à partir de 2 images non calibrées

2.1) Stratification

Lorsqu'on reconstruit un objet observé, on parle de reconstruction :

- métrique si on le reconstruit à une similitude près
- affine ——— transfo affine ———
- projective ——— homographie 3D ———

Si on observe des points m_i^k issus de points M^k inconnus par des caméras P_i inconnues, il y a une ambiguïté triviale qui fait qu'on ne pourra retrouver la réalité qu'à une homographie près. En effet :

$$m_i^k = P_i M^k \quad \text{mais aussi} \quad m_i^k = (P_i H)(H^{-1} M^k) \quad \forall H$$

→ Seules des connaissances a-priori permettront de retrouver une reconstruction exacte

(NB : on verra que même connaître les K_i ne permettrait d'avoir la réalité qu'à 1 similitude près)

2.2) Recons. projective

a) un raisonnement similaire au précédent montre que la matrice fondamentale de (P_1, P_2) est aussi celle de $(P_1 H, P_2 H)$ $\forall H$

b) Ceci implique que connaissant F, on ne peut espérer avoir $P_1 P_2$ qu'à une homog. près.

→ Forme Canonique

F connue, on choisit

$P_1 = (I|0)$ $P_2 = (SF | e_2)$

avec $\begin{cases} S \text{ antisymétrique quelconque} \\ e_2 \text{ tq } e_2^T F = 0 \end{cases}$

NB : pour éviter les cas dégénérés, prendre $S = [e_2]_\wedge$

c) Principe

On a donc le schéma :

- Estimation robuste de F (points d'intérêt + RANSAC)
- $P_1 P_2$ canoniques à partir de F
- Mise en correspondance stéréo
- Reconstruction projective à partir de $P_1 P_2$

2.3) Recons. Affine à partir d'une recons projective

a) Le plan à l'∞ $\Pi_\infty = (0,0,0,1)$ est invariant par transfo. affine

(vérifier $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-T} \Pi_\infty = \Pi_\infty$)

Donc si des points que l'on connait à priori comme devant être à l'∞ ne le sont plus, il suffit de transformer le plan auquel ils appartiennent en Π_∞ pour retrouver une recons. affine.

⇒
- Trouver 3 points 3D qui devraient être à l'∞
- Calculer leur plan Π
- Transformer la reconstruction par $H = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\Pi^T} \end{pmatrix}$

b) Détermination des points à l'∞

(1) – intersecter des droites du modèle projectif qui devraient être // et qui ne le sont pas

ou (2) – Trouver un point de fuite 2D v_1 dans I_1 et une seule droite l_2 dans I_2 de même direction
→ le point 3D correspondant M vérifie :
$$\{ P_1 M = v_1 \ , \ P_2 M \in l_2 \}$$ ce qui suffit

ou (3) – Une seule droite 3D et des ratios de distance connus à priori) ⇒ le point à l'∞ de la droite

2.4 | Recons. Métrique à partir d'affine

a) Principe : Ω_∞ est invariante par similitude.
→ la retrouver et ramener son équation à I_{33}
En pratique, on détermine son image ω dans une caméra, KR établissant ensuite le lien avec Ω_∞

b) En pratique
- Dans $P = K[R|t]$, retrouver ω. (cf. 1.vi)
- Estimer $AA^T = ((KR)^T \omega (KR))^{-1}$ (Choleski)
- Transformer la reconstruction par

$$H = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 | Reconstruction finale

Evidemment, seule la connaissance d'une longueur sur le modèle permet de retrouver l'échelle. Même chose pour l'origine et l'orientation.

NB : K_i est relié à ω_i, invariante par similitude
→ connaître les K_i ne donne qu'un recons. métrique