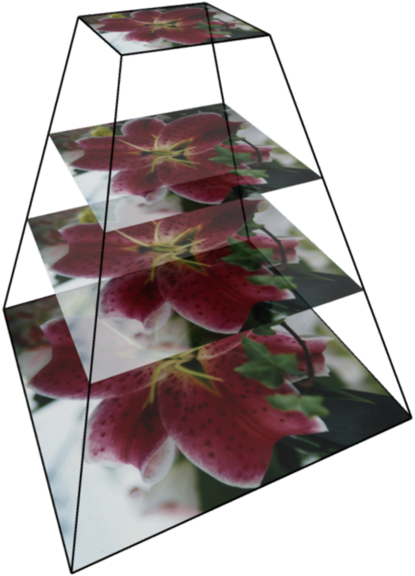
Atomes localisés et ondelettes

Guillaume Obozinski

LIGM/Ecole des Ponts - ParisTech

Traitement de l'information et vision artificielle
Ecole des Ponts

Pyramide d'images



Approximation multirésolutions (AMR)

Une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L_2(\mathbb{R})$

est une *approximation multirésolution* si

$\forall j \in \mathbb{Z}$,

- $V_j \subset V_{j-1}$
- $f \in V_j \quad \Leftrightarrow \quad f(2\cdot) \in V_{j-1}$
- $f \in V_j \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z}, f(\cdot - 2^j k) \in V_j$

et on a

- $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$.

Base de Riesz

Quand on considère des bases *non-orthogonales* d'un espace de dimension *infinie*, il faut imposer un condition de conservation de l'énergie pour garantir la stabilité de la base.

Définition

Une famille $\{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base de Riesz d'un espace de Hilbert* H*, s'il existe* $A, B > 0$ *tels que,*
pour tout $f \in H$*, il existe une suite* $(a_f[n])_{n\in\mathbb{Z}}$*, avec* $a_f[n] \in \mathbb{C}$*, telle que*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_f[n]\, \theta(t-n).$$

et

$$A\|f\|_2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_f[n]|^2 \sum \leq B\|f\|_2$$

Propriétés :

- la famille $\{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre et donc les coefficient de décomposition de toute fonction sont uniques.
- une base orthogonale satisfait la condition de Plancherel (donc $A = B = 1$) et est donc une base de Riesz.

Quelques bases de Riesz

Approximation constante par morceaux

$$\theta(t) = \mathbf{1}_{[0,1[}(t)$$

Approximation de Shannon

$$\theta(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}.$$

Approximation par des splines

Spline d'ordre m obtenu par m convolutions de $\mathbf{1}_{[0,1[}(t)$ et centrage en $\frac{1}{2}$ si m est pair ou 0 si m est impair,

$$\widehat{\theta}(\omega) = \left(\frac{sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^{m+1} \exp\left(-\frac{i\epsilon\omega}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \epsilon = m \bmod 2.$$

Orthogonalisation d'une base de Riesz

Il existe une façon naturelle d'obtenir une base orthogonale à partir d'une base de Riesz.

Théorème

Si $\{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base de Riesz de* H*, alors*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\theta}(\omega+2k\pi)|^2 < \infty,$$

et si

$$\widehat{\phi}(\omega) := \frac{\widehat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\theta}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}},$$

alors $\{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base orthogonale de* H*.*

Ondelette père *ou* fonction d'échelle

Soit un sous espace V_0 de $L_2(\mathbb{R})$ et un fonction $\phi \in V_0$.

Soit

$$\boxed{\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\phi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right)}$$

Proposition

$\{\phi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base orthogonale de* V_0
si et seulement si
$\{\phi_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base orthogonale de* V_j *pour tout* j *in* $\mathbb{Z}$.

On appelle ϕ l'*ondelette père* ou la *fonction d'échelle*.

Exemples d'ondelettes père

Pour l'approximation constante par morceaux et pour l'approximation de Shannon la base de Riesz $(\theta(t-n))_{n\in\mathbb{Z}}$ était déjà orthogonale.

Cas des B-splines de degré m.

$$\widehat{\phi}(\omega) = \frac{\exp(-i\epsilon\omega/2)}{\omega^{m+1}\sqrt{S_{2m+2}(\omega)}}$$

avec

$$S_n(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\omega + 2k\pi)^{-n}.$$

Comme

$$S_2(2\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\omega + 2k\pi)^{-2} = 4\big(\sin(\omega)\big)^{-2},$$

les fonctions S_{2m+2} sont donc des fractions rationnelles de polynômes trigonométriques.

Equation d'échelle

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\phi(t-n)}$$

En Fourier :

$$\widehat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{h}(\omega)\widehat{\phi}(\omega)$$

Si $\widehat{\phi}$ est continu en 0, on a

$$\widehat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\widehat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}}\widehat{\phi}(0).$$

La fonction d'échelle est donc en Fourier un produit infini de filtres.
A quelle condition est-ce qu'un produit infini de filtre est une fonction d'échelle ?

Filtre miroir conjugé

Un résultat central est qu'un filtre h est associé à une fonction d'échelle si et seulement si c'est un *filtre miroir conjugué*.

Théorème (Mallat, Meyer)

Soit $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ *et* h *le filtre associé donné par* $h[n] = \langle 2^{-\frac{1}{2}}\phi(\frac{t}{2}), \phi(t-n)\rangle$, *alors*

$$\widehat{h}(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad |\widehat{h}(\omega)|^2 + |\widehat{h}(\omega+\pi)|^2 = 2 \qquad (*)$$

Réciproquement, si on a $(*)$ *et que*

- $\widehat{h}$ *est* 2π*-périodique,*
- $\mathcal{C}_1$ *en* 0*,*
- $\exists \eta > 0, \forall \omega \in [\pi/2, \pi/2], \quad |\widehat{h}(\omega)| > \eta > 0,$

$$\text{alors} \qquad \widehat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\widehat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \qquad \text{est une fonction d'échelle}$$

Base multirésolution

La base orthogonale des

$$\frac{1}{\sqrt{2^j}}\phi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

nous permet d'obtenir la projection de f sur V_j.

- Peut-on avoir une base unique qui permet de calculer directement les approximations à toutes les résolutions ?
- Peut-on calculer facilement $\mathrm{Proj}_{V_j}(f)$ à partir de $\mathrm{Proj}_{V_{j-1}}(f)$?

Ondelette mère

On considère W_j l'orthogonal de V_j dans V_{j-1}. Comme $V_j \subset V_{j-1}$ on a

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

Soit g le filtre défini par

$$\widehat{g}(\omega) = \exp(-i\omega)\,\widehat{h}^*(\omega+\pi)$$

et

$$\widehat{\psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{g}(\omega)\,\widehat{\phi}(\omega);$$

soit

$$\psi_{j,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right), \quad \text{on a le}$$

Théorème (Mallat, Meyer)

- $(\psi_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base orthonormée de* W_j
- $(\psi_{j,n})_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *est une base orthonormée de* $L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$.

Desiderata pour une approximation multirésolution

On souhaite pour une base $B = (\psi_{j,n})_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$

1. Que plus une fonction est **régulière** mieux elle est approximée par V_j et que par conséquent ses coefficients aux hautes résolutions soient négligeables.
2. Que les éléments de la base soient le plus **localisés** possibles, i.e. à décroissance rapide ou mieux à support compact et que par conséquent si une fonction a une discontinuité, celle-ci se traduise par peu de coefficients importants aux hautes résolutions.
3. Que les éléments de la base eux-mêmes soient des fonctions **régulières** de sorte qu'une erreur due au bruit ou à la quantification des coefficients ne traduise pas par des perturbations de haute fréquence.

Ces propriétés permettront d'approximer bien les fonctions régulières par morceaux avec peu de discontinuités.

Propriétés souhaitées pour une ondelette ψ

Moments nuls

On dit que ψ a p moments nuls si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \, \psi(t) \, dt = 0, \quad \text{pour } 0 \leq k < p.$$

Support compact

On peut montrer que ψ, ϕ sont à support compact si et seulement si h est à support compact.

Régularité Lipschitzienne

Taille du support contre moments nuls

Théorème (Moments nuls)

Si on suppose que $|\phi(t)| = \mathcal{O}\big((1+t^2)^{-(p/2+1)}\big)$ *et de même pour* ψ, *alors* ϕ *a* p *moment nuls si et seulement si* $\widehat{h}(\omega)$ *et se* $p-1$ *dérivées s'annulent en* $\omega = \pi$.

Théorème (Daubechies)

Un filtre miroir conjugué h *tel que* $\widehat{h}(\omega)$ *ait* p *zéros en* $\omega = \pi$ *a au moins* $2p$ *coefficients non-nuls.*

Remarque : Les ondelettes construites par Daubechies ont exactement $2p$ coefficients non nuls et p moments nuls.

Ondelette de Haar (1909)

$$\phi(t) = \mathbf{1}_{[0,1[}(t)$$

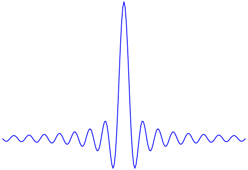
$$\psi(t) = -\mathbf{1}_{[0,1/2[}(t) + \mathbf{1}_{[1/2,1[}(t)$$

- support compact le plus petit possible !
- un seul moment nul
- approxime très mal les fonctions régulières

Ondelette de Shannon

$$\phi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\phi(\omega) = \mathbf{1}_{\pi,\pi}(\omega)$$



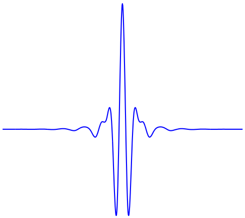
- De classe $\mathcal{C}^\infty$
- Tous ses moments sont nuls ! !
- Support infini et fonction à décroissance lente car $\widehat{\phi}$ est discontinue.

Ondelette de Meyer (1985)

- De classe $\mathcal{C}^\infty$
- Tous ses moments sont nuls ! !
- Support infini mais fonction à décroissance polynomiale de degré n !
- En pratique le support est trop grand car A est grand.

Remarque : On peut montrer qu'il n'est pas possible de construire d'ondelette $\mathcal{C}^\infty$ avec décroissance exponentielle.

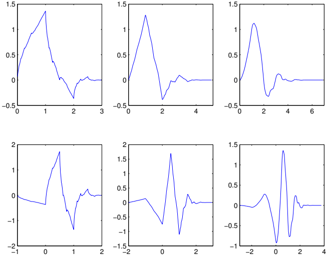
Ondelettes de Battle et Lemarié (1987,1988)



- De classe $\mathcal{C}^{m-1}$
- Avec $m+1$ moments nuls !
- Support infini
- Fonctions ϕ, ψ à décroissance exponentielle !

Remarque : On retrouve l'ondelette de Haar pour $m = 0$.

Ondelettes de Daubechies (1988)



- Avec p moments nuls.
- Support compact de taille minimale ($= 2p - 1$) pour une ondelette à p moment nuls !
- Régularité difficile à caractériser précisément. $\mathcal{C}^{\alpha}$ avec $\alpha \approx 0.2p$ quand p est grand.
- Régularité croît lentement avec p.

Remarque : Une variante des ondelettes de Daubechies, les symlettes, sont moins asymétriques.