

Eléments de théorie des ondelettes, TCD.

Enseignant: Guillaume Obozinski

8.1 Introduction aux bases d'ondelettes

Dans de nombreux domaines du traitement du signal, il est utile de pouvoir approcher un signal à plusieurs résolutions, pour pouvoir l'analyser, le compresser, le visualiser, etc.

Le sous-échantillonnage d'un signal discret ne prend pas en compte sa structure. De plus, on peut souhaiter prendre en compte la structure du signal continu sous-jacent pour obtenir de bonnes approximations du signal à plusieurs résolutions.

En vision, il est commun d'adopter la stratégie qui consiste à traiter d'abord un version de l'image à basse résolution est de passer ensuite à des résolutions plus élevées en se concentrant par exemple sur des régions d'intérêt. Dans ce but on construit ce qui est souvent appelé une *pyramide d'images*.

Il est souhaitable de pouvoir construire et générer facilement la séquence d'images à toutes les résolutions. C'est ce qu'une approximation multirésolution permet de faire.

8.1.1 Approximation multirésolutions (AMR)

On considère d'abord comme espace de signaux l'espace $L_2(\mathbb{R})$. (Les images viendront plus tard). On définit une AMR comme une séquence de sous-espaces emboîtés de signaux qui vont du plus fin (à petite échelle ou à grande résolution) au plus grossier (à grande échelle ou à faible résolution) et telle que si une fonction appartient à l'un de ces espaces V_j la fonction zoomée d'un facteur 2 appartient à l'espace suivant. On exige aussi que les espaces d'une AMR soient aussi invariants par un groupe de translations.

Plus précisément, une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L_2(\mathbb{R})$ est une *approximation multirésolution* si $\forall j \in \mathbb{Z}$,

- (a) $V_j \subset V_{j-1}$
- (b) $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j-1}$
- (c) $f \in V_j \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, f(\cdot - 2^j k) \in V_j$
- (d) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$.

8.1.2 Ondelette père

Soit $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une AMR. Et soit $\phi \in V_0$. Si les fonctions $(\phi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de V_0 , alors, comme nous allons le voir, on peut facilement construire une approximation multirésolution à partir de ϕ . (Le fait que des AMR avec de telles fonctions

ϕ existent en quantité n'est pas évident a priori mais on peut montrer facilement comment en construire à partir de bases de Riesz de V_0 . Voir les transparents du cours pour quelques exemples).

On appelle ϕ l'*ondelette père* ou *fonction d'échelle*. Soit les dilatées et translatées de ϕ

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \quad j, n \in \mathbb{Z}.$$

On peut démontrer¹ que le fait que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ soit une AMR implique le résultat suivant :

Proposition 1 $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthogonale de V_0 si et seulement si $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthogonale de V_j pour tout j in \mathbb{Z} .

8.1.3 Equation d'échelle

La fonction $\phi_{1,0} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right)$ est un élément de la base de V_1 . Comme $V_1 \subset V_0$ par la deuxième propriété des AMR, $\phi_{1,0} \in V_0$ et elle peut donc se décomposer sur la base de V_0 . Si on note h la suite de ses coefficients de décomposition, on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \phi(t - n).$$

Cette équation est l'*équation d'échelle* associée à l'ondelette et on appelle h le *filtre miroir* associé. Comme nous allons le voir, cette équation est fondamentale, car le filtre miroir caractérise entièrement l'ondelette père et la relation entre ses transformées aux diverses échelles.

Il est intéressant de considérer l'équation d'échelle dans le domaine de Fourier :

$$\widehat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{h}(\omega) \widehat{\phi}(\omega)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}(\omega/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{h}\left(\frac{\omega}{4}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right) \\ &= \left[\prod_{p=1}^P \frac{\widehat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right] \widehat{\phi}(2^{-P}\omega) \end{aligned}$$

1. La démonstration non triviale est omise ici.

Donc, si $\widehat{\phi}$ est continu en 0, on a

$$\widehat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\widehat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \widehat{\phi}(0).$$

La fonction d'échelle est donc en Fourier (et sous certaines hypothèses) un produit infini de filtres.

Une question clé est de savoir à quelles conditions est-ce qu'un produit infini de filtres est une fonction d'échelle ?

Filtre miroir conjugué

Un résultat central de la théorie des ondelettes est qu'un filtre h est associé à une fonction d'échelle si et seulement si c'est un *filtre miroir conjugué*. Le théorème², suivant caractérise ces filtres qui permettent de construire des bases d'approximation multi-résolution.

Théorème 1 (Mallat, Meyer) Soit $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ et h le filtre associé, alors

$$\widehat{h}(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{h}(\omega)|^2 + |\widehat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (*)$$

Réciproquement, si on a (*) et que

- \widehat{h} est 2π -périodique,
- \mathcal{C}_1 en 0,
- $\exists \eta > 0, \forall \omega \in [\pi/2, \pi/2], |\widehat{h}(\omega)| > \eta > 0,$

$$\text{alors} \quad \widehat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\widehat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \quad \text{est une fonction d'échelle.}$$

8.1.4 Base multirésolution

La base orthogonale des

$$\frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

nous permet d'obtenir la projection de f sur V_j . Néanmoins, a priori, pour chaque valeur de j , l'approximation de f dans V_j , c'est-à-dire sa projection, doit être recalculée. D'où les deux questions :

- Peut-on avoir une base unique qui permet de calculer directement les approximations à toutes les résolutions ?
- Peut-on calculer facilement la projection $P_{V_j}(f)$ de f sur V_j à partir de $P_{V_{j-1}}(f)$, celle sur V_{j-1} ?

2. Ce théorème que nous ne démontrons pas est donné pour référence. Il n'est pas nécessaire à la compréhension du cours

Ondelette mère

On considère W_j l'orthogonal de V_j dans V_{j-1} . Comme $V_j \subset V_{j-1}$ on a

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

En termes simples, W_j est l'espace qui contient les “détails” de la fonction qui sont encore présents dans $P_{V_{j-1}}(f)$ mais perdus dans $P_{V_j}(f)$. S'il est possible de construire une base de W_j qui ait une relation simple avec la base de V_{j-1} , il deviendra possible de passer facilement d'un niveau de résolution au suivant. Le deuxième résultat que nous allons voir est qu'on peut effectivement calculer une telle base grâce à un second filtre miroir que nous allons noter g et qui est déduit de h . En particulier on peut exprimer sa relation à h en Fourier.

Soit g le filtre défini par

$$\widehat{g}(\omega) = \exp(-i\omega) \widehat{h}^*(\omega + \pi)$$

où \widehat{h}^* est le conjugué (au sens des nombre complexes) de \widehat{h} . et

$$\widehat{\psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{g}(\omega) \widehat{\phi}(\omega);$$

soit

$$\psi_{j,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right).$$

On a le théorème :

Théorème 2 (Mallat, Meyer) .

- $(\psi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_j
- $(\psi_{j,n})_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est une base orthonormée de $L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$.

On appelle ψ l'ondelette mère.

8.1.5 Propriétés et familles d'ondelettes

Il est souhaitable qu'une base multi-résolution satisfasse certaines propriétés. En particulier

- que les ondelettes père et mère soient bien localisées, donc si possible à support compact de taille minimale ou sinon à décroissance rapide lorsque $|t| \rightarrow \infty$.
- qu'elles soient régulières.
- que leur spectre en fréquence soit plutôt concentré.
- qu'elles aient des moments nuls pour bien approximer les fonctions régulières par morceaux.
- que les filtres miroirs soient à support compact où à décroissance rapide.

Certaines de ces propriétés sont difficilement compatibles et demandent de faire des compromis. La préoccupation de trouver les meilleurs compromis a conduit à l'introduction de diverses familles d'ondelettes : ondelettes de Haar, de Shannon, de Daubechies, de Battle-Lemarié, les Symmlets, les Coiflets et autres. (Voir les transparents du cours 7 et les TP pour un parcours de ce bestiaire).

8.1.6 Caractérisation des filtres

Les théorèmes précédents nous donnent des résultats d'existence, des relations entre filtres et entre filtres et ondelettes, mais ne nous donnent pas de façon explicite de construire les ondelettes à partir des filtres, les filtres à partir des ondelettes, ou de calculer la décomposition d'une fonction sur chacune de ces bases de façon efficace, ce que l'on appellera la *transformée en ondelette*.

Commençons par récapituler quelques relations établies :

Décomposition des bases de V_1 et W_1 sur V_0

Comme $\phi_{1,0} \in V_1 \subset V_0$, $\phi_{1,0}$ admet une décomposition sur la base de V_0 avec des coefficients $h[n]$. Ces coefficients définissent le filtre miroir associé. De la même façon, $\psi_{1,0} \in W_1 \subset V_0$ admet une décomposition sur la base de V_0 avec des coefficients $g[n]$. En choisissant g comme dans le théorème, on a la garantie que les $\psi_{1,n}$ forment une base orthogonale de W_1 (et en particulier sont orthogonales à V_1).

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n]\phi(t-n) \quad (8.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n]\phi(t-n) \quad (8.2)$$

Ceci signifie, étant donné que $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une BON de V_0 , que

$$h[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle \quad (8.3)$$

$$g[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle. \quad (8.4)$$

8.1.7 Récurrence entre les coefficients aux différentes échelles et transformée en ondelettes

Notations

Pour $c \in \mathbb{C}$, on continue de noter c^* le conjugué³ de c . La notation \bar{h} sera réservée pour noter la suite symétrisée par rapport à l'origine : $\bar{h}[n] := h[-n]$.

Soit $f \in L_2(\mathbb{R})$ et $P_{V_j}(f)$ son approximation dans l'espace V_j . Comme $\phi_{j,n}$ est une BON de V_j on a

$$P_{V_j}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] \phi_{j,n} \quad \text{avec} \quad a_j[n] := \langle \phi_{j,n}, f \rangle,$$

3. Les ondelettes que nous voyons dans ce cours sont des fonctions à valeurs réelles, donc on pourrait omettre cette notation, mais il est a priori possible de construire des ondelettes complexes.

les coefficients de décomposition de f sur la base de V_j . De la même manière, comme $\psi_{j,n}$ est une BON de W_j on a

$$P_{W_j}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_j[n] \psi_{j,n} \quad \text{avec} \quad d_j[n] := \langle \psi_{j,n}, f \rangle,$$

les coefficients de décomposition de f sur la base de W_j .

On cherche à établir les relations entre les coefficients de la projection de f sur les espaces V_j , V_{j+1} et W_{j+1} . Ces relations vont nous permettre de spécifier l'algorithme de calcul de la transformée en ondelettes. Plus précisément,

1. Comme $V_{j+1} \subset V_j$ on pourra déduire $a[j+1]$ de $a[j]$.
2. Comme $W_{j+1} \subset V_j$ on pourra déduire $d[j+1]$ de $a[j]$.
3. Comme $V_{j+1} \oplus W_{j+1} = V_j$ on pourra déduire $a[j]$ de $(a[j+1], d[j+1])$.

Analysons ces trois cas l'un après l'autre.

1. $\mathbf{a}[j] \rightarrow \mathbf{a}[j+1]$

Par définition, si

$$a_j[n] = \langle \phi_{j,n}, f \rangle$$

alors

$$f_j := P_{V_j}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] \phi_{j,n}$$

Comme $V_{j+1} \subset V_j$ et que V_{j+1} et V_j sont tous deux des espaces vectoriel, on a

$$\begin{aligned} P_{V_{j+1}}(f) &= P_{V_{j+1}}(f_j) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,p}, f_j \rangle \phi_{j+1,p} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] \langle \phi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j+1,p} \end{aligned}$$

D'autre part, par définition, on a,

$$P_{V_{j+1}}(f) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_{j+1}[p] \phi_{j+1,p}$$

Comme $\{\phi_{j+1,p}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ est une BON de V_{j+1} , on peut identifier les coefficients, ce qui nous donne :

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] \langle \phi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle$$

Il nous faut calculer

$\langle \phi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle$. Mais par définition :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j+1,p}^*(t) \phi_{j,n}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}} \phi^* \left(\frac{t - 2^{j+1}p}{2^{j+1}} \right) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi \left(\frac{t - 2^j n}{2^j} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi^* \left(\frac{u}{2} \right) \phi(u + 2p - n) du \quad \text{avec } u = \frac{t - 2^{j+1}p}{2^j} \\ &= h[n - 2p] \quad \text{d'après (8.3).} \end{aligned}$$

On a donc

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] h[n - 2p] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_j[n] \bar{h}[2p - n],$$

ou de manière plus compacte

$$\boxed{a_{j+1}[p] = (a_j * \bar{h})[2p]}$$

2. $\boxed{\mathbf{a}[j] \rightarrow \mathbf{d}[j+1]}$

De même comme $W_{j+1} \subset V_j$ et que W_{j+1} et V_j sont tous deux des espaces vectoriel, on a

$$\begin{aligned} P_{W_{j+1}}(f) &= P_{W_{j+1}}(f_j) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{j+1,p}, f_j \rangle \psi_{j+1,p} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] \langle \psi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle \psi_{j+1,p} \end{aligned}$$

D'autre part, par définition, on a,

$$P_{V_{j+1}}(f) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} d_{j+1}[p] \psi_{j+1,p}$$

Comme $\{\psi_{j+1,p}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ est une BON de W_{j+1} , on peut identifier les coefficients, ce qui nous donne :

$$\boxed{d_{j+1}[p] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] \langle \psi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle}$$

En faisant un calcul similaire à celui fait précédemment on a d'après (8.4),

$$\langle \phi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle = g[n - 2p]$$

On a donc

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_j[n] g[n - 2p] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_j[n] \bar{g}[2p - n],$$

ou de manière plus compacte

$$\boxed{d_{j+1}[p] = (a_j * \bar{g})[2p]}$$

3. $\boxed{(\mathbf{a}[\mathbf{j} + \mathbf{1}], \mathbf{d}[\mathbf{j} + \mathbf{1}]) \rightarrow \mathbf{a}[\mathbf{j} + \mathbf{1}]}$

Comme

$$\begin{aligned} \phi_{j,p} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,n}, \phi_{j,p} \rangle \phi_{j+1,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{j+1,n}, \phi_{j,p} \rangle \psi_{j+1,n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[p - 2n] \phi_{j+1,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[p - 2n] \psi_{j+1,n}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \langle \phi_{j,p}, f \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[p - 2n] \langle \phi_{j+1,n}, f \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[p - 2n] \langle \psi_{j+1,n}, f \rangle$$

$$\text{et donc} \quad a_j[p] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[p - 2n] a_{j+1}[n] + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[p - 2n] d_{j+1}[n].$$

Etant donné une séquence $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$, on définit la séquence \check{x} par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} \check{x}[2n] = x[n] \\ \check{x}[2n + 1] = 0 \end{cases}.$$

On peut alors réécrire l'équation précédente :

$$a_j[p] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[p - n] \check{a}_{j+1}[n] + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[p - n] \check{d}_{j+1}[n]$$

$$\boxed{a_j = \check{a}_{j+1} * h + \check{d}_{j+1} * g}$$

Le schéma de calcul de la transformée d'ondelette et le calcul inverse peuvent donc se résumer par les schémas de la figure 8.1.

Initialisation

Nous avons donc établi des relations entre les coefficients aux différentes échelles, mais jusqu'à présent nous n'avons pas établi de relation directe avec le signal f lui-même. Nous allons voir que f nous donne les coefficients à la plus haute résolution. Supposons que f est un signal d'extension finie, par exemple un signal continu supporté par $[0, 1]$ et que l'on

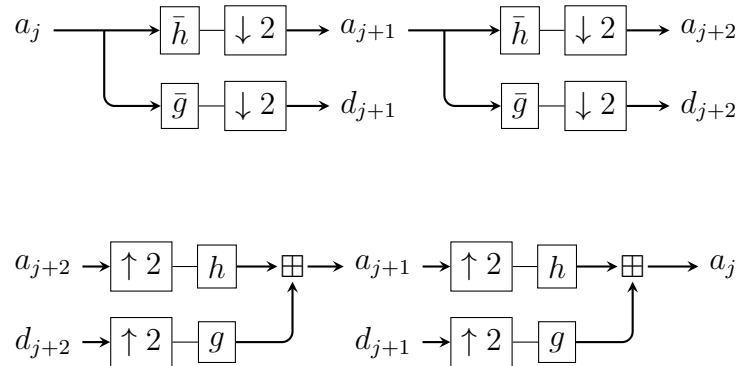


Figure 8.1. Schéma de calcul de la transformée en ondelette (haut) et de la transformée inverse (bas). $\boxed{\downarrow 2}$ correspond à l'opération de sous-échantillonnage qui ne garde que les termes pairs et $\boxed{\uparrow 2}$ correspond à l'opération $x \mapsto \check{x}$. Enfin, \boxplus est l'addition simple.

souhaite que la résolution maximale nous donne un signal fini de longueur N de sorte que par définition on a $2^{-L} = N$. Alors,

$$\begin{aligned}
 a_L[n] &= \langle \phi_{L,n}, f \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^L}} \phi^* \left(\frac{t - 2^L n}{2^L} \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sqrt{N} \phi^* (tN - n) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(\frac{u + n}{N} \right) \phi^*(u) du \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(\frac{n}{N} \right),
 \end{aligned}$$

en faisant l'hypothèse que f est régulière.

Problèmes de bords

Lorsqu'on travaille avec un signal tiré d'une application réelle, le signal a une extension finie et a_L est donc de la forme

$$(a_L[n])_{1 \leq n \leq N}$$

Or, dans tous les calculs précédents, dans toutes les convolutions on a fait l'hypothèse que les coefficients étaient définies pour toute valeur de $n \in \mathbb{Z}$. Il y a essentiellement trois solutions :

1. On périodise le signal, ce qui est équivalent à utiliser une base d'*ondelettes périodiques*. Un des problèmes est que le signal est typiquement discontinu au bord ce qui entraîne des grands coefficients.
2. On double la taille du signal en utilisant son image miroir ($a[-(n+1)] = a[n]$ pour $0 \leq n \leq N-1$) ce qui est équivalent à utiliser une base d'*ondelettes repliées*.

3. Enfin on peut utiliser des ondelettes spéciales qu'on appelle des *ondelettes de bord*.

8.1.8 Ondelettes 2D

Pour obtenir une base des fonctions de $L_2(\mathbb{R}^2)$ on pourrait utiliser une base de $L_2(\mathbb{R})$ puisque $L_2(\mathbb{R}^2) = L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R})$. Par exemple à partir de $\{\psi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$, on pourrait construire les

$$\psi_{j,j',n,n'}(x_1, x_2) = \psi_{j,n}(x_1) \psi_{j',n'}(x_2).$$

qui forment une base de $L_2(\mathbb{R}^2)$. Un sérieux problème est que ces fonctions mélangent différentes résolutions en abscisse et en ordonnée.

Il convient donc de revenir au but fixé, qui est, pour des images, de pouvoir obtenir une *pyramide d'images*, c'est-à-dire une séquence d'images à des résolutions successivement plus fines. En notant $V_j^2 = V_j \otimes V_j$, on peut vérifier que les espaces V_j^2 pour j variant dans \mathbb{Z} fournissent une *approximation multirésolution* (voir la définition dans le cours précédent) avec pour chaque V_j la base des $\{\phi_{j,n_1,n_2}\}_{j,n_1,n_2 \in \mathbb{Z}}$ avec

$$\phi_{j,n_1,n_2}(x_1, x_2) = \phi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2).$$

On souhaite néanmoins, comme dans le cas 1D obtenir une base unique qui permette de décomposer une image f de façon à pouvoir reconstruire facilement l'approximation de f dans V_j^2 pour tout j .

Espaces de détails en 2D

Comme dans le cas 1D on peut chercher le complémentaire orthogonal de V_{j+1}^2 dans V_j^2 . Notons le \widetilde{W}_{j+1} . Évidemment, $\widetilde{W}_{j+1} \neq W_{j+1} \otimes W_{j+1}$. Néanmoins on sait que

$$V_{j+1}^2 \oplus \widetilde{W}_{j+1} = V_j^2 \quad \text{et que} \quad V_{j+1} \oplus W_{j+1} = V_j.$$

Donc, en utilisant la distributivité du produit tensoriel sur la somme directe, on a

$$\begin{aligned} V_j^2 &= (V_{j+1} \oplus W_{j+1}) \otimes (V_{j+1} \oplus W_{j+1}) \\ &= V_{j+1}^2 \oplus (V_{j+1} \otimes W_{j+1}) \oplus (W_{j+1} \otimes V_{j+1}) \oplus (W_{j+1} \otimes W_{j+1}), \end{aligned}$$

où encore

$$\widetilde{W}_j = \widetilde{W}_j^{(1)} \oplus \widetilde{W}_j^{(2)} \oplus \widetilde{W}_j^{(3)},$$

avec

$$\widetilde{W}_j^{(1)} = V_{j+1} \otimes W_{j+1}, \quad \widetilde{W}_j^{(2)} = W_{j+1} \otimes V_{j+1}, \quad \widetilde{W}_j^{(3)} = W_{j+1} \otimes W_{j+1}.$$

L'espace $\widetilde{W}_j^{(k)}$ admet comme base les $\{\psi_{j,n_1,n_2}^k\}_{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2}$, avec

$$\begin{aligned} \psi_{j,n_1,n_2}^1(x_1, x_2) &= \phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2), \\ \psi_{j,n_1,n_2}^2(x_1, x_2) &= \psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2), \\ \psi_{j,n_1,n_2}^3(x_1, x_2) &= \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2). \end{aligned}$$

Coefficients d'ondelettes d'une image

Etant donnée une image f on peut calculer ses coefficients de décomposition sur V_j^2 ou les $\widetilde{W}_j^{(k)}$ que l'on note respectivement a_j et d_j^k :

$$a_j[n_1, n_2] := \langle \phi_{j,n_1,n_2}, f \rangle \quad d_j^k[n_1, n_2] = \langle \psi_{j,n_1,n_2}^k, f \rangle.$$

On peut dériver des relations de récurrence qui permettent de calculer la transformée d'ondelette 2D. Sans entrer dans le détail, on a

$$\begin{aligned} a_{j+1}[n_1, n_2] &= (a_j * \bar{h}\bar{h})[2n_1, 2n_2] \\ d_{j+1}^1[n_1, n_2] &= (a_j * \bar{h}\bar{g})[2n_1, 2n_2] \\ d_{j+1}^2[n_1, n_2] &= (a_j * \bar{g}\bar{h})[2n_1, 2n_2] \\ d_{j+1}^3[n_1, n_2] &= (a_j * \bar{g}\bar{g})[2n_1, 2n_2], \end{aligned}$$

où on note $\bar{h}\bar{g} : (n_1, n_2) \mapsto \bar{h}[n_1]\bar{g}[n_2]$, etc. Quand on calcule récursivement les coefficients d'ondelettes, on peut placer ces derniers dans une matrice de la même taille que l'image originelle et de façon à ce que l'image à la résolution la plus faible (dans l'exemple ci-dessous à l'échelle $L + 3$) soit dans le coin supérieur gauche, et que les coefficients de détails des différents types complètent le carré à l'échelle supérieure. La répartition des coefficients suit le schéma ci-dessous :

a_{L+3}	d_{L+3}^2	d_{L+2}^2	d_{L+1}^2
d_{L+3}^1	d_{L+3}^3		
d_{L+2}^1		d_{L+2}^3	
d_{L+1}^1		d_{L+1}^3	

8.2 Bases par blocs, TCD et codage JPEG

Les ondelettes sont à la base du schéma de compression JPEG2000 (http://fr.wikipedia.org/wiki/JPEG_2000) qui n'a pas été largement adopté en dépit de ses performances supérieures

au schéma de compression JPEG, aujourd'hui très répandu. Il convient de discuter un peu quel est le principe de codage des images sous-jacent à JPEG pour apprécier la différence entre JPEG et JPEG 2000. JPEG est basé sur la *transformée en cosinus discrets* (TCD ou DCT en anglais) qui est une forme de base par bloc. Dans la suite on introduit d'abord les bases par blocs, puis la TCD et brièvement la méthode de compression JPEG.

Les bases par blocs

L'idée des bases par blocs est qu'une manière naturelle d'obtenir une base de $L_2(\mathbb{R})$ est de partitionner \mathbb{R} en une séquence d'intervalles $[a_p, a_{p+1}[$ de longueurs $l_p = a_{p+1} - a_p$ de construire une base de $L_2([a_p, a_{p+1}[$) et d'utiliser l'union dénombrable des bases ainsi obtenues. Il n'est pas difficile que cette dernière fournit une base de \mathbb{R} . Une base de $L_2([a_p, a_{p+1}[$) se déduit par transformation linéaire d'une base de $L_2([0, 1[$).

Théorème 3 Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base de $L_2([0, 1[$) alors

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{l_k}} 1_{[a_p, a_{p+1}[} e_n \left(\frac{\cdot - a_p}{l_k} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}},$$

est une BON de $L_2(\mathbb{R})$.

On peut en particulier utiliser la base de Fourier pour $[0, 1]$, $\{e_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $e_n(t) = e^{2i\pi nt}$ puisque toute fonction sur l'intervalle $[0, 1]$ peut-être vue comme la restriction à cet intervalle d'une fonction 1-périodique.

Base de cosinus-I

Si on cherche à avoir la meilleure approximation possible par une base de Fourier, le fait de simplement considérer qu'une fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ est périodique n'est pas une bonne idée car la fonction obtenue sera presque sûrement discontinue en 0 (et donc tous les entiers). Pour avoir une fonction continue et périodique on a intérêt à considérer la fonction paire \tilde{f} dont la restriction à $[0, 1]$ est f . \tilde{f} est périodique de période 2. On peut donc obtenir une décomposition de f dans la base de Fourier sur $[-1, 1]$ de la forme

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{2}\right) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{2}\right).$$

Mais comme la fonction est **paire** les coefficients b_k sont nuls.

Nous avons donc montré que

$$\{t \mapsto \lambda_k \cos(\pi kt)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

est une base de $L_2([0, 1])$ (avec λ_k une constante de normalisation).

On peut construire d'autres bases en cosinus en utilisant d'autres façons de symétriser/périodiser la fonction.

Base par bloc discret et TCD

On peut faire le même genre de choses pour obtenir une base pour des signaux discret et finis. Au lieu de construire directement une base pour les vecteurs de \mathbb{R}^N (vus comme des fonctions discrétisées) on peut partitionner l'intervalle discret $\llbracket 1, N \rrbracket$ en blocs (souvent de taille régulière mais pas nécessairement) de tailles N_1, N_2, \dots, N_K , construire des bases pour les espaces \mathbb{R}^{N_k} et ensuite les concaténer. L'une des bases que l'on peut utiliser pour chacun de ces espaces et correspondant à l'idée de la base de cosinus-I sur $L_2([0, 1])$ (c'est-à-dire utiliser la version paire de la fonction) est celle des cosinus discrets.

Dans la suite on suppose que $N_k = N_0$ est constant.

Dans le cas des signaux discret le signal est $(f[n])_{0 \leq n \leq N_0-1}$ et la fonction discrète "paire" correspondante est alors la fonction \tilde{f} égale à f sur $\llbracket 0, N_0 - 1 \rrbracket$ et avec $\tilde{f}[-n - 1] = f[n]$ pour $n \in \llbracket 0, N_0 - 1 \rrbracket$. La fonction est donc paire autour de $-\frac{1}{2}$, ce qui complique un peu les calculs⁴...

La base des cosinus discrets est

$$\left\{ n \mapsto \lambda_k \frac{2}{N_0} \cos \left(\frac{k\pi}{N_0} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \right\}_{k \in \llbracket 0, N_0-1 \rrbracket},$$

avec λ_k une constante de normalisation.

La transformée en cosinus discret se calcule efficacement en utilisant la FFT. Pour être précis la FFT est utilisée pour calculer une TCD en base de cosinus-IV, une autre base en cosinus, qui permet ensuite de calculer les la TCD en cosinus-I.

Codage par bloc d'images par TCD

C'est ce que l'on fait dans le codage par bloc pour les images par transformée en cosinus discret. En particulier on partitionne l'image en *patches* de 8×8 pixels, qui sont décomposé sur une base séparable de cosinus discrets. Lorsque l'on regarde une image JPEG de près on peut souvent voir la trame des patches qui forme un grille de taille 8×8 .

Compression JPEG

La compression JPEG intègre la DCT dans un schéma de compression à plusieurs étapes.

1. L'image est partitionnée en patches de 8×8 pixels.
2. La DCT de chaque patch est calculé
3. Les coefficients de la DCT sont *quantifiés* avec un schéma de *quantification pondéré*.
4. Les coefficients de chaque patch sont listés des bases fréquences aux hautes fréquences en parcourant les coefficients en zig-zag à partir du coin du patch correspondant aux bases fréquences. Comme les coefficients quantifiés sont nuls à partir d'un certain rang, on ne les code pas et on utilise un symbole EOF pour *End of File* pour dire que le patch est terminé.

4. Il est possible de prendre une fonction paire par rapport à 0. On obtient alors une autre base de cosinus. Voir http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform

5. Comme les coefficients varient souvent peu d'un patch à l'autre (pour toutes les régions homogènes de l'image) on code les différences de coefficients de la TCD : si DC_i est le vecteur de coefficient de la TCD pour le patch i on code $DC_i - DC_{i-1}$.
6. Finalement, pour compresser la séquence de nombres obtenue on utilise un codage entropique de Huffman (voir le cours d'introduction à la théorie de l'information).