Algorithmique et Structures de Données
Examen écrit (1h30)

G1: pascal.monasse*(at)*enpc.fr G2: nicolas.audebert*(at)*lecnam.net
G3: julien.hauret*(at)*lecnam.net

28/03/2022

Les exercices sont indépendants. Il n'est pas interdit d'utiliser votre portable pour tester vos algorithmes, mais évidemment pas le wifi.

1 Suites de type Fibonacci

On s'intéresse aux suites du type $f_{n+2} = a\, f_{n+1} + b\, f_n$, $f_0 = f_1 = 1$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. On rappelle que pour la suite de Fibonacci ($a = b = 1$), on a $f_n \sim \varphi^n$ avec le nombre d'or $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Quand il s'agira de complexité, on considère qu'une opération élémentaire est l'une des quatre opérations sur les nombres, ainsi qu'une fonction de la librairie mathématique, comme la fonction puissance `pow`.[1]

1. Écrire une fonction récursive C++ calculant le terme f_n.
2. Quelle est sa complexité en fonction de n ?
3. Écrire une fonction C++ analogue mais de complexité linéaire $O(n)$.
4. On considère le vecteur $F_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.
   (a) Écrire une relation de récurrence sous forme matricielle liant F_n et F_{n-1}.
   (b) En déduire une formule exprimant F_n en fonction de n.
5. On se base sur la formule précédente pour calculer plus vite.
   (a) On décompose n en base 2 : $n = \sum_{i=0}^{m} \epsilon_i\, 2^i$ avec $\epsilon_m = 1$, les autres étant 0 ou 1. A désignant une matrice réelle 2×2, notant $A_i = A^{2^i}$, écrire A^n en fonction des A_i et ϵ_i.
   (b) Écrire une relation de récurrence liant A_{i+1} à A_i.
   (c) Utilisant les types `Imagine::Vector<Float>` et `Imagine::Matrix<float>`, écrire une fonction de complexité $O(\log n)$ calculant f_n. (Opérateurs utiles : `V[i]`, `M(i,j)`, `M*V` et `M1*M2`)
6. On suppose $a^2 + 4b > 0$. Expliquer comment procéder pour calculer f_n en $O(1)$ (sans faire le détail des calculs). Bonus : et si $a^2 + 4b < 0$?

2 Multiplications

Lors d'un séminaire, Kolmogorov affirma : "On ne peut pas multiplier deux nombres de n chiffres en moins de $O(n^2)$ opérations, sinon on aurait bien trouvé comment en 6000 ans." Insensible à cet argument d'autorité, un jeune étudiant vint le voir trois semaines plus tard pour lui montrer ce qu'il avait découvert et qu'on détaille dans cet exercice... Les opérations élémentaires sont ici les additions, soustractions et multiplications de nombres à un seul chiffre.

1. Montrer que les méthodes apprises à l'école primaire pour l'addition et la soustraction sont en $O(n)$.
2. Montrer que la complexité est $O(n^2)$ pour la multiplication.
3. On suppose a et b de longueur $2n$. On décompose en $a = a_1 \times 10^n + a_2$ et $b = b_1 \times 10^n + b_2$ avec les a_i, b_i ayant chacun n chiffres. Notant M_n la complexité de la multiplication $a \times b$, montrer qu'on a besoin de mutliplier les a_i par les b_j et que donc $M_{2n} = 4\, M_n + O(n)$. A-t-on diminué la complexité ?
4. Montrer qu'au prix de quelques additions ou soustractions en plus, on peut se contenter de 3 multiplications de nombres à n ou $n+1$ chiffres (on peut considérer $a_1 + a_2$ et $b_1 + b_2$).
5. Montrer qu'on a alors $M_{2n} \leq 3\, M_n + C\, n$ avec C une constante.
6. En déduire que $M_n = O(n^{\log 3/\log 2}) = O(n^{1.6})$.

1. Les trois premières questions sont un classique des entretiens techniques d'embauche, la suite est plus originale et permet de se démarquer.